Львівський державний університет безпеки життєдіяльності ДСНС України

Кафедра прикладної математики і механіки

ТЕМА 7. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ.
ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЛЕКЦІЙНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ 2 *КУРСУ*
З ДИСЦИПЛІНИ СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Мета лекції:

Навчальна: вивчити задачі багатокритеріальної оптимізації, оптимальність за Парето, методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації: метод вагових коефіцієнтів, метод послідовних поступок, метод мінімізації загальної поступки.
Виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.
Розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

План

Література

1. *Аршинова О.І., Шевченко А.В.* Системний аналіз. Навч. посібник. – К.: НАУ, 2008. – 128 с.
2. *Роік О.М., Шиян А.А., Нікіфорова Л.О.* Системний аналіз. Навч. посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2015. – 83 с.
3. *Кузик А.Д.* Основи системного аналізу. – Львів: ЛДУ БЖД, 2005. – 100 с.
4. *Кунда Н.Т.* Дослідження операцій у транспортних системах. – К.: Видавничий Дім “Слово”, 2008. – 400 с.
5. *Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д.* Дослідження операцій. – К.: Центр учбової літератури, 2007.– 256 с.
6. *Таха Х.* Введение в исследование операций. –6-е изд.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. – 912 с.

Час проведення: 2 години.
Місце проведення: лекційний зал.
Забезпечення заняття: мультимедіа.

1. Сутність задачі багатокритеріальної оптимізації.

Моделі математичного програмування, розглянуті в попередніх лекціях, передбачали оптимізацію лише однієї функції мети (один критерій). На практиці реальна задача характеризується кількома показниками ефективності. Так, часто зустрічається вираз «досягти максимального ефекту при найменших витратах», який вже означає прийняття рішення при двох критеріях. Оцінка діяльності підприємств та планування як системи прийняття рішень проводиться на основі більше десятка критеріїв: виконання плану виробництва за обсягом, за номенклатурою, плану реалізації, прибутку за показниками рентабельності, продуктивності праці тощо. Отже, в реальній постановці задачі є багатокритеріальними.

У теорії багатокритеріальної оптимізації (БКО) шукаються оптимальні рішення за кількома критеріями. Задача БКО формулюється наступним чином: потрібно знайти числа $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$, які максимізують (мінімізують) функції мети

$$\begin{aligned} &f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\to\max(\min);\\ &f_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\to\max(\min);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ &f_m\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\to\max(\min); \end{aligned} \tag{7.1}$$

при заданих обмеженнях

$$\begin{cases} g_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\le b_1;\\ g_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\le b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ g_k\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\le b_k. \end{cases} \tag{7.2}$$

Оскільки задачу пошуку мінімуму функції завжди можна звести до задачі пошуку максимуму функції в подальшому будемо розглядати лише задачі максимізації функцій мети.

Безліч точок $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, що задовольняють систему обмежень (7.2), утворюють допустиму область $D\subset R^n$.

У векторній формі математичну модель БКО (7.1) - (7.2) можна записати таким чином:

$$\vec{f}(X)=(f_1(X),...,f_m(X))\to\max \text{ при } X\in D \tag{7.3}$$

де $\vec{f}(X)$– вектор-функція аргументу $X\in D$.

Вперше проблема БКО виникла у італійського економіста В. Парето в 1904 р. при математичному дослідженні товарного обміну. Надалі інтерес до проблеми БКО посилився у зв’язку з розробкою і використанням обчислювальної техніки, і вже пізніше стало зрозуміло, що багатокритеріальні задачі виникають також і в техніці, наприклад, при проектуванні складних технічних систем.

В теорії БКО можна виділити наступні основні напрямки розвитку:

1. Розробка концепції оптимальності.
2. Доведення існування розв’язку, оптимального у відповідному сенсі.
3. Розробка методів знаходження оптимального розв’язку.

Якщо функції $f_1, f_2, ..., f_m$ досягають максимум в одній і тій самій точці $X^* \in D$, то говорять, що задача (7.1) - (7.2) має **ідеальне рішення**.

Випадки існування ідеального рішення в багатокритеріальної задачі вкрай рідкісні. У разі відсутності «ідеального рішення» в задачі (7.1) - (7.2) шукається **компромісне рішення**. Однією з проблем в задачах БКО є формалізація принципу оптимальності, тобто визначення того, в якому сенсі одне рішення краще за інше.

2. Оптимальність за Парето.

Нехай $X_1,\ X_2 \in D$. Якщо для всіх критеріїв $f_1,\ f_2, \dots,\ f_m$ мають місце нерівності $f_j(X_2) \geq f_j(X_1),\ \ j=\overline{1,m}$, причому хоча б одна нерівність строга, то говорять, що рішення X_2 **домінує над рішенням** X_1. Відношення переваги прийнято позначати у вигляді $X_2 \succ X_1$. Рішення X_1 можна відкинути, як неконкурентоспроможне. В наслідок такого відкидання "некращих" розв'язків множина так званих ефективних допустимих рішень значно звужується.

У задачі БКО точку $X_0 \in D$ називають **оптимальною за Парето**, якщо не існує іншої точки $X \in D$, яка б домінувала над X_0. Точки, оптимальні за Парето, утворюють безліч точок, оптимальних за Парето (множину ефективних точок) $D_p \subset D$.

Оптимальні рішення багатокритеріальної задачі слід шукати лише серед елементів множини D_p. У цій області жоден критерій не може бути поліпшений без погіршення хоча б одного з інших. Важливою властивістю множини Парето є можливість позбутися заздалегідь невдалих рішень, які поступаються іншим за всіма критеріями.

Приклад 7.1. Проілюструємо вибір рішень, оптимальних за Парето, на прикладі задачі з двома критеріями f_1 та f_2 (обидва максимізуються). Нехай множина D складається з скінченої кількості рішень $X_1,\ X_2, \dots,\ X_{10}$. Кожному рішенню відповідає пара показників f_1 та f_2. Будемо зображати рішення точкою на площині з координатами $f_1,\ f_2$ і пронумеруємо точки відповідно до номера рішення (рис.7.1.).

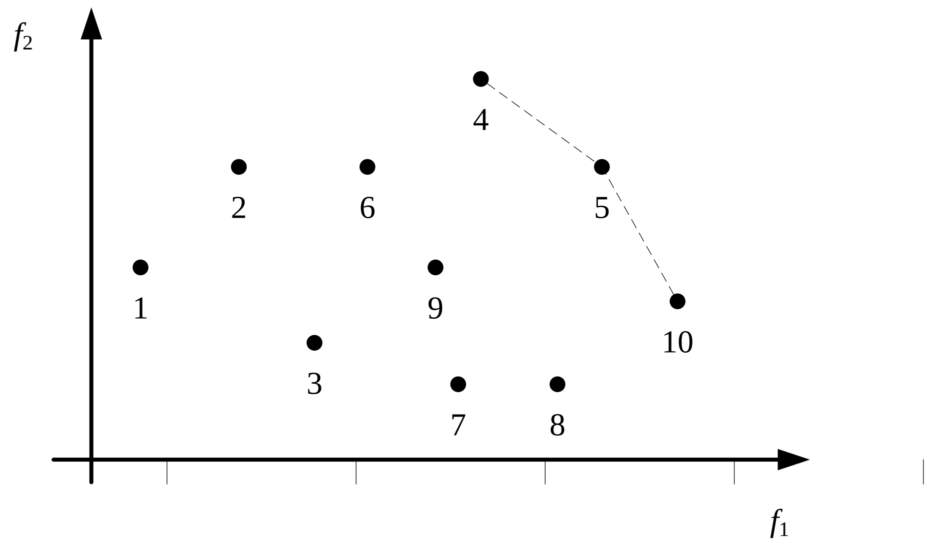

Рис.7.1.

Оптимальними за Парето будуть точки X_4, X_5, X_{10}, які лежать на правій верхній межі області: X_4 – найкращий розв'язок за критерієм f_2, X_{10} – найкращий розв'язок за критерієм f_1. Для X_4, X_5, X_{10} не існує домінуючих рішень. Для решти точок існує принаймні одне рішення, для якого показник ефективності або f_1, або f_2, або обидва більше ніж для даної точки. Саме серед рішень, що відповідають оптимальним за Парето точкам, потрібно вибрати оптимальне, за певними міркуваннями, рішення. Цей вибір повинен робитися особою, яка приймає рішення та несе відповідальність за здійснений вибір.

3. Методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.

Для розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації існує кілька десятків методів та їх модифікацій. Розглянемо детальніше наступні методи:

- метод вагових коефіцієнтів;
- метод послідовних поступок;
- метод мінімізації загальної поступки.

Ці методи є різними за своєю природою і в загальному випадку дають розв'язки, що не співпадають між собою. Разом з тим не можна стверджувати, що один з методів є кращим за інші; по суті наведені методи призначені для розв'язування задач з різними перевагами в процесі прийняття рішень.

В **методі вагових коефіцієнтів** формується єдина функція мети як зважена сума вихідних функцій мети. Нехай w_i, $i=\overline{1,m}$ – додатний ваговий коефіцієнт, який відображає важливість кожної функції мети, причому $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.

Узагальнена функція мети запишеться так:

$$F = w_1 f_1 + w_2 f_2 + ... + w_m f_m \to \max .$$

Встановлення важливості кожної функції мети є дуже суб'єктивним. В даний час розроблено методи, які зменшують суб'єктивний фактор при визначенні вагових коефіцієнтів. Одним з недоліків методу вагових коефіцієнтів є можливість недостатню ефективність одного критерію компенсувати іншим.

В **методі послідовних поступок** критеріям вихідної задачі присвоюється ранг, який вказує на важливість критерію. Максимізують, перший за рейтингом критерій; потім призначають величину припустимого зниження значення цього критерію δ і максимізують другий за важливістю критерій при умові, що значення першого критерію не повинно відрізнятися від максимального більш ніж на величину встановленого зменшення (поступки). Знову призначають величину поступки, але вже за другим критерієм і знаходять максимум третього за важливістю критерію за умови, щоб значення перших двох критеріїв не відрізнялися від раніше знайдених максимальних значень більше ніж на величини відповідних поступок. Аналогічно максимізують інші критерії. Тобто, на будь-якому етапі *і* при розв'язку задачі лінійного програмування з'являється $(i-1)$ додаткових обмежень:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \ge M_1 - \delta_1; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \ge M_2 - \delta_2; \\ ....; \\ f_{i-1}(x_1, x_2, ..., x_n) \ge M_{i-1} - \delta_{i-1}, \end{cases}$$

де M_j – максимальне значення функції мети f_j, знайдене на етапі *j*.

При використанні методу послідовних поступок потрібно попередньо нормалізувати критерії. Основним недоліком методу послідовних поступок є суб'єктивність призначення і узгодженням величин поступок, а також необхідність формування незмінного для всієї задачі апріорного ранжирування критеріїв.

В методі **мінімізації загальної поступки** при заданих обмеженнях визначаються оптимальні значення кожної функції мети окремо (незалежна оптимізація). Потім шукається мінімальне значення загальної поступки *z*, при якому кожна функція мети $f_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множині допустимих рішень відхиляється від свого оптимального значення $f_{j,\max}$ не більше ніж на величину загальної поступки. Тобто, при заданих обмеженнях (7.2) розв'язується така задача оптимізації

$$z \to \min$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f_{1,\max} - f_{1,\max} \cdot z; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f_{2,\max} - f_{2,\max} \cdot z; \\ ....; \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f_{n,\max} - f_{n,\max} \cdot z; \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 7.2. Автотранспортне підприємство розробляє план доставки вугілля та руди до металургійного комбінату. Для перевезення 100 т вугілля потрібно 12 автомобілів, 100 т руди – 7 автомобілів. Максимальна кількість автомобілів, які можна залучити до перевезення, становить 127. Розвантаження вугілля і руди виконується в приймальному пункті, тривалість роботи якого становить 16 год. Тривалість розвантаження 100 т вугілля становить 0,5 год., 100 т руди – 1,4 год. За будь-яких умов потрібно виконати перевезення 200 т вугілля та 400 т руди. За перевезення 100 т вугілля автотранспортне підприємство отримує дохід 12 тис. грн., 100 т руди – 7 тис. грн. Експлуатаційні витрати на перевезення 100 т вугілля становлять 7 тис. грн., 100 т руди – 5 тис. грн. Знайти такий план перевезень, при якому загальний обсяг перевезень та дохід від перевезень будуть максимальними, а експлуатаційні витрати – мінімальними.

Встановлено, що найважливішою є кількість перевезеного вантажу ($w_1 = 0{,}5$), а найменш важливою – собівартість перевезень ($w_3 = 0{,}2$). Максимальне зниження кількості перевезеного вантажу не повинно перевищувати 10%, максимальне зниження доходу – 15% за умови, що оптимізується лише одна відповідна цільова функція.

Розв'язання. Позначимо x_1 – кількість перевезеного вугілля (сотен т.), а x_2 – кількість перевезеної руди (сотен т.). Тоді задачу можна записати так:

$$f_1 = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$f_2 = 12x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$f_3 = 7x_1 + 5x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 \le 127; \\ 0{,}5x_1 + 1{,}4x_2 \le 16; \\ x_1 \ge 2; \\ x_2 \ge 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу методом вагових коефіцієнтів, методом послідовної поступки, методом мінімізації загальної поступки та порівняємо отримані результати. Обчислення виконаємо в системі ***Maple***. Функцію f_3 помножимо на (– 1) і зведемо задачу лише до максимізації заданих функцій мети.

МЕТОД ВАГОВИХ КОЕФІЦЄНТІВ

> *restart* :

Задаємо функції мети, обмеження та вагові коефіцієнти

> $f_1 := x_1 + x_2; f_2 := 12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2; f_3 := -1 \cdot (7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2);$

$$f_1 := x_1 + x_2$$

$$f_2 := 12\,x_1 + 7\,x_2$$

$$f_3 := -7\,x_1 - 5\,x_2 \qquad (1)$$

> $obmez := \{12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 127, 0.5 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 \le 16, x_1 \ge 2, x_2 \ge 4\};$

$$obmez := \{2 \le x_1, 4 \le x_2, 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127, 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \qquad (2)$$

> $w_1 := 0.5; w_3 := 0.2; w_2 := 1 - w_1 - w_3;$# *вагові коефіцієнти*

$$w_1 := 0.5$$

$$w_3 := 0.2$$

$$w_2 := 0.3 \qquad (3)$$

> $with(Optimization):$

> $F := w_1 \cdot f_1 + w_2 \cdot f_2 + w_3 \cdot f_3;$ # *узагальнена функція мети.*

$$F := 2.7\,x_1 + 1.6\,x_2 \tag{4}$$

> $Fmax := Maximize(F, obmez);$ # *максимізуємо узагальнену функцію мети*

$$Fmax := [28.8165413533835, [x_1 = 4.94736842105263186, x_2 = 9.66165413533834538]] \tag{5}$$

> $assign(Fmax[2]);$ # *надамо змінним x_1 та x_2 отримані значення*

> *В результаті оптимізації* *<u>методом вагових коефіцієнтів</u>* *отримано; Максимальний обсяг перевезення* $= evalf_4(f_1);$ *Максимальний дохід* $= evalf_4(f_2);$ *Мінімальна собівартість* $= evalf_4(-1 \cdot f_3);$ *План перевезень* $'x_1' = evalf_4(x_1), 'x_2' = evalf_4(x_2);$

В результаті оптимізації методом вагових коефіцієнтів отримано

Максимальний обсяг перевезення $= 14.61$

Максимальний дохід $= 127.0$

Мінімальна собівартість $= 82.94$

План перевезень $x_1 = 4.947,\ x_2 = 9.662$ (6)

МЕТОД ПОСЛІДОВНОЇ ПОСТУПКИ

> $restart:$

Задаємо функції мети, обмеження

> $f_1 := x_1 + x_2; f_2 := 12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2; f_3 := -1 \cdot (7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2);$

$$f_1 := x_1 + x_2$$
$$f_2 := 12\,x_1 + 7\,x_2$$
$$f_3 := -7\,x_1 - 5\,x_2 \tag{7}$$

> $obmez := \{12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 127, 0.5 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 \le 16, x_1 \ge 2, x_2 \ge 4\};$

$$obmez := \{2 \le x_1, 4 \le x_2, 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127, 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \tag{8}$$

Оптимізацію починаємо з функції мети з найвищим пріоритетом (з найбільшим ваговим коефіцієнтом). Це функція *f1*

> $with(Optimization):$

> $f1max := Maximize(f_1, obmez);$

$$f1max := [14.6090225563910, [x_1 = 4.94736842105263098, x_2 = 9.66165413533834716]] \tag{9}$$

Задаємо значення поступки для функції мети *f1*

> $\delta_1 := 0.1 \cdot f1max[1];$

$$\delta_1 := 1.460902256 \tag{10}$$

Оптимізуємо наступну за пріоритетом функцію мети *f2*, використовуючи додаткове обмеження на величину максимальної поступки для функції *f1*

> $obmez := obmez$ **union** $\{f_1 \ge f1max[1] - \delta_1\};$

$$obmez := \{2 \le x_1, 4 \le x_2, 13.14812030 \le x_1 + x_2, 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127, 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \tag{11}$$

> $f2max := Maximize(f_2, obmez);$

$$f2max := [127.000000000000, [x_1 = 6.99263158000000118, x_2 = 6.15548872000000014]] \tag{12}$$

Задаємо значення поступки для функції мети *f2*

> $\delta_2 := 0.15 \cdot f2max[1];$

$$\delta_2 := 19.05000000 \tag{13}$$

Оптимізуємо наступну за пріоритетом функцію мети *f3*, використовуючи додаткове обмеження на величину максимальної поступки для функцій *f1* та *f2*

> $obmez := obmez$ **union** $\{f_2 \ge f2max[1] - \delta_2\};$

$$obmez := \{2 \le x_1, 4 \le x_2, 13.14812030 \le x_1 + x_2, 107.9500000 \le 12\,x_1 + 7\,x_2, 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127, 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \tag{14}$$

> $f3min := Maximize(f_3, obmez);$

$$f3min := [-72.1058646600000, [x_1 = 3.18263157999999756, x_2 = 9.96548872000000330]] \quad (15)$$

> $assign(f3min[2]);$ # надамо змінним x_1 та x_2 отримані значення

> В результаті оптимізації <u>методом послідовної поступки</u> отримано; Максимальний обсяг перевезення $= evalf_4(f_1)$; Максимальний дохід $= evalf_4(f_2)$; Мінімальна собівартість $= evalf_4(-1\cdot f_3)$; План перевезень $'x_1' = evalf_4(x_1), 'x_2' = evalf_4(x_2)$;

В результаті оптимізації методом послідовної поступки отримано

Максимальний обсяг перевезення = 13.15

Максимальний дохід = 108.0

Мінімальна собівартість = 72.10

План перевезень $x_1 = 3.183,\ x_2 = 9.965$ (16)

МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ЗАГАЛЬНОЇ ПОСТУПКИ

> $restart:$

Задаємо функції мети, обмеження

> $f_1 := x_1 + x_2; f_2 := 12\cdot x_1 + 7\cdot x_2; f_3 := -1\cdot(7\cdot x_1 + 5\cdot x_2);$

$$f_1 := x_1 + x_2$$
$$f_2 := 12\,x_1 + 7\,x_2$$
$$f_3 := -7\,x_1 - 5\,x_2 \quad (17)$$

> $obmez := \{12\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \le 127,\ 0.5\cdot x_1 + 1.4\cdot x_2 \le 16,\ x_1 \ge 2,\ x_2 \ge 4\};$

$$obmez := \{2 \le x_1,\ 4 \le x_2,\ 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127,\ 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \quad (18)$$

Знаходимо максимальні значення кожної функції мети окремо (незалежна оптимізація)

> $with(Optimization):$

> $f1 := Maximize(f_1, obmez); f2 := Maximize(f_2, obmez); f3 := Maximize(f_3, obmez);$

$$f1 := [14.6090225563910, [x_1 = 4.94736842105263098, x_2 = 9.66165413533834716]]$$
$$f2 := [127., [x_1 = 8.25000000000000000, x_2 = 4.]]$$
$$f3 := [-34., [x_1 = 2., x_2 = 4.]] \quad (19)$$

Позначимо величину загальної поступки z - значення (десятковий процент), на яке ми можемо "погіршити" максимальні значення кожної функції мети, знайдені незалежно. Доповнимо початкові обмеження обмеженнями, які задають величину максимальної поступки для кожної функції.

> $obmez1 := obmez$ **union** $\{f_1 - f1_1 + z\cdot f1_1 \ge 0,\ f_2 - f2_1 + z\cdot f2_1 \ge 0,\ z \ge 0,\ f_3 - f3_1 + z\cdot f3_1\cdot(-1) \ge 0\};$

$$obmez1 := \{0 \le z,\ 0 \le -7\,x_1 - 5\,x_2 + 34. + 34.\,z,\ 0 \le x_1 + x_2 - 14.60902256 + 14.6090225563910\,z,\ 0 \le 12\,x_1 + 7\,x_2 - 127. + 127.\,z,\ 2 \le x_1,\ 4 \le x_2,\ 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127,\ 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \quad (20)$$

Знайдемо мінімальне значення загальної поступки

> $zmin := Minimize(z, obmez1);$

$$zmin := [0.418504468659165, [z = 0.418504468659165130, x_1 = 2.87687262368625074, x_2 = 5.61820871372157349]] \quad (21)$$

> $assign(zmin[2]);$ # надамо змінним x_1 та x_2 отримані значення

> В результаті оптимізації <u>методом мінімізації загальної поступки</u> отримано; Максимальний обсяг перевезення $= evalf_4(f_1)$; Максимальний дохід $= evalf_4(f_2)$; Мінімальна собівартість $= evalf_4(-1\cdot f_3)$; План перевезень $'x_1' = evalf_4(x_1), 'x_2' = evalf_4(x_2)$;

В результаті оптимізації методом мінімізації загальної поступки отримано

Максимальний обсяг перевезення = 8.495

Максимальний дохід = 73.85

Мінімальна собівартість = 48.23

План перевезень $x_1 = 2.877,\ x_2 = 5.618$ (22)

Для аналізу отриманих результатів знайдемо при заданих обмеженнях максимум кожної функції мети, незалежно від значень інших функцій мети (незалежна оптимізація).

НЕЗАЛЕЖНА ОПТИМІЗАЦІЯ

```
> restart :
```

Задаємо функції мети, обмеження

```
> f[1] := x[1] + x[2]; f[2] := 12·x[1] + 7·x[2]; f[3] := -1·(7·x[1] + 5·x[2]);
```

$$f_1 := x_1 + x_2$$
$$f_2 := 12\,x_1 + 7\,x_2$$
$$f_3 := -7\,x_1 - 5\,x_2 \qquad (23)$$

```
> obmez := {12·x[1] + 7·x[2] ≤ 127, 0.5·x[1] + 1.4·x[2] ≤ 16, x[1] ≥ 2, x[2] ≥ 4};
```

$$obmez := \{2 \le x_1,\ 4 \le x_2,\ 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 127,\ 0.5\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16\} \qquad (24)$$

```
> with(Optimization) :
> f1 := Maximize(f[1], obmez); f2 := Maximize(f[2], obmez); f3 := Maximize(f[3], obmez);
```

$$f1 := [14.6090225563910,\ [x_1 = 4.94736842105263098,\ x_2 = 9.66165413533834716]]$$
$$f2 := [127.,\ [x_1 = 8.25000000000000000,\ x_2 = 4.]]$$
$$f3 := [-34.,\ [x_1 = 2.,\ x_2 = 4.]] \qquad (25)$$

```
> В результаті незалежної оптимізації отримано; Максимальний обсяг перевезення = evalf[4](f1[1]);
  Максимальний дохід = evalf[4](f2[1]); Мінімальна собівартість = evalf[4](-1·f3[1]);
```

результаті незалежної оптимізації отримано

Максимальний обсяг перевезення = 14.61

Максимальний дохід = 127.

Мінімальна собівартість = 34. (26)

Отже, отримані такі допустимі, оптимальні в певному сенсі, рішення.

	к-ть вугілля, x_1, 10^2 т	к-ть руди, x_2, 10^2 т	Обсяг перевез. f_1, 10^2 т	Дохід, f_2, тис.грн	Собівар-тість, f_3, тис.грн
Незалежна оптимізація функції f_1	4,95	9,66	**14,61**	127	82,94
Незалежна оптимізація функції f_2	8,25	4	12,25	**127**	77,75
Незалежна оптимізація функції f_3	2	4	6	52	**34**
Метод вагових коефіцієнтів	4,95	9,67	14,61	127	82,94
Метод послідовної поступки	3,18	9,97	13,15	108	72,1
Метод мінімізації загальної поступки	2,88	5,62	8,49	73,85	48,23

Оскільки ідеального рішення задача немає, то остаточний вибір серед запропонованих варіантів покладається на відповідальну особу.

Контрольні запитання.

1. Сформулюйте в загальному виді задачу багатокритеріальної оптимізації.
2. Яке рішення задачі багатокритеріальної оптимізації називають ідеальним?
3. Дайте визначення точки, оптимальної за Парето.
4. Які методи багатокритеріальної оптимізації ви знаєте?
5. Які недоліки методу вагових коефіцієнтів?

Завдання на самопідготовку.

1. Віртуальний університет ЛДУ БЖД [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/
2. Системний аналіз та теорія прийняття рішень [Електронний ресурс] / Чмир Оксана Юріївна. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1765

Доцент
кафедри прикладної математики і механіки Оксана Чмир

Лекція обговорена на засіданні
кафедри прикладної математики і механіки

Протокол № від “ ” серпня 20 р.