

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2013

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

| | |
|--|----|
| Bondarenko I.V. Groups generated by bounded automata without finitary states | 7 |
| Mishura Yu.S., Rizhniak G. R. Objective Call Option Price Behaviour of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process | 11 |
| Oliyunk B.V. Metric realizable permutation groups | 15 |
| Orlovskiy R.Ya. Confidence intervals for parameter of covariance function of the Dagum family | 19 |
| Zatula D.V. Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval | 23 |
| Кочубінська Є.А. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи часткових автоморфізмів корених дерев | 29 |
| Чайченко С.О. Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орліча | 33 |

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

| | |
|--|----|
| Konstantinov O.V. Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface» | 43 |
| Lavrenyuk M.V. The stress-strain of the plane containing rectangular multicoated inclusion | 47 |
| Голіченко О.Л., Малюга В.С. Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі | 51 |
| Конаровська М.І. Загальна параболічна крайова задача без початкових даних для сингулярних рівнянь | 57 |
| Лимарченко В.О. Нелінійні коливання трубопроводу з рідиною при поздовжній вібрації основи трубопроводу | 63 |
| Семенович К.О., Лимарченко О.С. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні | 67 |
| Яременко М.І. Максимальні напівгрупи стиску та максимальні дисипативні оператори в просторах Лебега | 71 |

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

| | |
|--|-----|
| Antosyak P.P. About one new principle of rational collective choice | 77 |
| Krak I., Korlyuk O. Addition of the training set for the classification of clustering methods | 82 |
| Laver V.O. Fuzzy generalizations for the proportional rule | 85 |
| Peschachenko V.S., Guba A.A., Shushpanov C. I. Mixed concrete-symbolic predicate transformer | 89 |
| Skobelev V.V. Satisfiability modulo linear arithmetic over a finite ring | 95 |
| Zub S.S., Zub S.I. Canonical Poisson structure on $T^*SE(3)$ in the quaternion variables | 107 |
| Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації з урахуванням просідань та повзучості скелета ґрунту | 113 |
| Власюк А.П., Цветкова Т.П. Математичне моделювання перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці | 118 |
| Галкін О.В. Поліморфізм та класи в мові Haskell | 125 |
| Гаркуша Н.І. Про близькість моделей динаміки Вольтера та Гудвіна | 131 |
| Грунський І.С., Прянчишнікова О.О. Мови, що можуть бути представлені в повністю позначених графах | 135 |
| Гулаєва Н.М. Еволюційні алгоритми | 141 |
| Зубенко В.В. Про комунікативну інформатику | 151 |
| Івохін Є.В. Про підхід до використання нейронних мереж для прогнозування нечітких фінансових даних | 157 |
| Кійковська О.І., Чабанюк Я.М. Процедура стохастичної апроксимації в схемі дифузійної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу | 161 |
| Коляденко М.А. Підходи технічного аналізу при прогнозуванні фондових показників. Дослідження індикатора 52-week high | 165 |
| Кондрук Н.Е. Метод визначення кількісної міри переваги в колективному порядку | 171 |
| Королік Р.П., Пічкур В.В. Оцінка множини фазових обмежень множинної дискретної системи | 175 |
| Кудін В.І. Метод базисних матриць та розв'язки матричної гри у змішаних стратегіях | 179 |
| Кукурба В.Р., Чабанюк Я.М., Кінаш А.В. Асимптотична дифузійність флуктуацій неперервної оптимізаційної процедури в напівмарковському середовищі | 184 |
| Мащенко С.О., Саад М. Обзор развития многокритериальных моделей принятия решений | 190 |
| Мічута О.Р., Власюк А.П., Мартинюк П.М. R -вимірний задача впливу багатоконпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів | 198 |

УДК 519.7

Кукурба В.Р.¹ аспірант,
Чабанюк Я.М.¹ д.ф.-м.н., проф.,
Кінаш А.В.² студентка.

Асимптотична дифузійність флуктуацій неперервної оптимізаційної процедури в напівмарковському середовищі

Розглянуто асимптотичну дифузійність флуктуацій неперервної процедури стохастичної оптимізації в випадку коли функція регресії має сингулярно збурений доданок, який залежить від зовнішнього середовища, що описується рівномірно ергодичним напівмарковським процесом. Використано асимптотичні властивості компенсуючого оператора напівмарковського процесу для побудови генератора граничного дифузійного процесу.

Ключові слова: асимптотична дифузійність, напівмарковський процес.

¹ Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, e-mail: rector@lp.edu.ua

² Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Вступ. Поряд з збіжністю процедури стохастичної оптимізації (ПСО) [1] важливою властивістю ПСО є асимптотична поведінка флуктуацій в околі точки екстремуму функції регресії, яка в свою чергу характеризує швидкість збіжності ПСО. В класичних схемах [2] дослідження асимптотичної дифузійності реалізується використовуючи принцип інваріантності для процесів в неперервній ПСО.

В даній роботі для неперервної ПСО з асимптотично дифузійним збуренням в схемі дифузійної апроксимації з малим параметром $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$, в напівмарковському середовищі встановлено асимптотичну дифузійність флуктуацій навколо точки рівноваги усередненої динамічної системи.

V.R. Kukurba¹ post-graduate
Ya.M. Chabanyuk¹, PhD.
A.V. Kinash², student.

Asymptotic diffusivity of fluctuation of continuous stochastic optimization procedure in semi-Markov media.

The asymptotic diffusivity of fluctuation of continuous stochastic approximation procedure in the case when the regression function hew the singular perturbation addition, where dependent with on the external media, that is described by uniformly ergodic semi-Markov process.

Asymptotic properties of compensative operator of semi-Markov process for creating generator of limited diffusion process.

Key words: asymptotic diffusivity, semi-Markov process.

¹ Lviv Polytechnic National University, 79013,
Lviv, Bandera street, 12,
e-mail: rector@lp.edu.ua

² Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1.

1. Постановка задачі. Розглянемо неперервну ПСО в напівмарковському середовищі [6] в схемі дифузійної апроксимації

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^d)), \quad (1)$$

де

$$C^\varepsilon(u; x) = \nabla_{b(t)} C(u; x) + \varepsilon^{-1} C_0(u; x) \quad (2)$$

$$\text{де } \nabla_{b(t)} C(u; x) = \frac{(C(u + b(t); x) - C(u - b(t); x))}{2b(t)},$$

$u \in R$. Функція регресії $C^\varepsilon(u; x)$, $u \in R$, $x \in X$ задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем.

$$du_x^\varepsilon(t)/dt = C^\varepsilon(u_x^\varepsilon(t); x), x \in X. \quad (3)$$

Функція регресії $C(u; x)$ така, що $C(u; \cdot) \in C^3(R)$, тобто допускає наступний розклад псевдо градієнта

$$\nabla_{u(t)} C(u; x) = C^{(1)}(x) + u C^{(2)}(x) + u^2 C^{(3)}(u; x), \quad (4)$$

$$C^{(1)}(x) = C'(0; x), C^{(2)}(x) = C''(0; x), \quad (5)$$

$$C^{(3)}(x) = C''(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1. \quad (6)$$

Нехай для збурення $C_0(u; x)$ функції регресії (2) виконується умова балансу

$$\hat{O}A1: \text{PC}_0(0; x) := \int_X \rho(dx) C_0(x) = 0,$$

де $\rho(B), B \in X$, - стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n := x(\tau_n), n \geq 0$, в напівмарковській процес $x(t), t > 0$, в стандартному фазовому просторі станів (X, X) з лічильним процесом

$$v(t) := \max\{n: \tau_n \leq t\}, t \geq 0,$$

для моментів марковського відновлення $\tau_n, n \geq 0$ [3]. Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) := P(x, B) G_x(t), \quad (7)$$

де $x \in X, B \in X, t \geq 0$,

задає напівмарковський процес $x(t), t > 0$. В (7) стохастичне ядро $P(x, B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$,

$$P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\},$$

з функцією розподілу $G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\} = P\{\theta_x \leq t\}$. Разом з напівмарковський процесом $x(t), t > 0$, розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t > 0$, з генератором [3]

$$Q\varphi(x) := q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $q(x) := 1/g(x), g(x) := \int_0^\infty \bar{G}_x(t) dt$,

$\bar{G}_x(t) := 1 - G_x(t)$. Супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t > 0$, є рівномірно ергодичний [4] з стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$. Між стаціонарними розподілами $\pi(B)$ та $\rho(B)$ існує зв'язок [6]

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q := \int_X \pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx) = \rho(dx)g(x)/m, m := \int_X \rho(dx)g(x) = 1/m.$$

Розподіли $\pi(B)$ та $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\tilde{\Pi}$ відповідно співвідношеннями:

$$\Pi\varphi(x) := \tilde{\varphi}1(x), \tilde{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x), 1(x) \equiv 1, x \in X, \quad (8)$$

$$\tilde{\Pi}\varphi(x) := \tilde{\varphi}1(x), \tilde{\varphi} := \int_X \rho(dx)\varphi(x), 1(x) \equiv 1, x \in X.$$

При відповідних умовах на нормуючі функцію $a(t), b(t), t > 0$, неперервна ПСО (1) збігається з ймовірністю одиниця до точки екстремуму $u^* = 0$ усередненої системи

$$du(t)/dt = C'(u),$$

де

$$C(u) := \int_X \pi(dx)C(u; x).$$

Таким умовам задовольняють функції

$$a(t) = a/t, b(t) = b/t^{1/4}, 0 < t_0 < t, a, b > 0$$

які і будуть розглядатися надалі в ПСО (1). З того, що $u^* = 0$ має місце рівність

$$C'(0) = 0,$$

Враховуючи (5) та (8) додаткову умову балансу

$$\hat{O}A2: \text{PC}^0(x) = 0.$$

Асимптотична нормальність ПСО (1) досліджується для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \sqrt{t} [u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)], \quad (9)$$

де дифузійне збурення $C_0^\varepsilon(t)$ визначається через $C_0(u; x)$ з (2):

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} a \int_{t_0}^t C_0(u^\varepsilon(s); x(\frac{s}{\varepsilon^4})) \frac{1}{s} ds. \quad (10)$$

Зауважимо, що збурення (10) задовольняє рівняння

$$\frac{dC_0^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-2} \frac{a}{t} C_0(u^\varepsilon(t); x(\frac{t}{\varepsilon^4})). \quad (11)$$

В позначенні $\tilde{v}^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)$

флуктуація (9) має представлення

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \sqrt{t} \tilde{v}^\varepsilon(t),$$

або в зворотній формі

$$\tilde{v}^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}}.$$

З іншої сторони з (9) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon \left[\frac{v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + C_0^\varepsilon(t) \right]. \quad (12)$$

Зауваження 1. Для збурення $C_0^\varepsilon(t)$ буде доведена слабка збіжність

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t > 0, \varepsilon \rightarrow 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^2}{t^2},$$

а

$$\sigma^2 = 2a^2 \int_x \pi(dx) C_0(x) R_0 C_0(x). \quad (13)$$

В (12) R_0 - потенціал до оператора Q [3], такий, що виконуються співвідношення

$$QR_0 = R_0Q = \Pi - I,$$

де I - тотожний оператор.

2. Теорема. При умовах збіжності ПСО (1) та при додаткових умовах УБ1, УБ2 а також

$$D1: \rho^2 := \sigma^2 + \sigma_\mu > 0,$$

де σ^2 обчислюється в (13), а

$$\sigma_\mu = qa^2 \int_x \rho(dx) \mu(x) C_0^2(x), \mu(x) := g_2(x) - 2g^2(x),$$

$$D2: c_2 < -\frac{1}{2a},$$

де

$$c_2 := q \int_x \rho(dx) C^{(2)}(x),$$

має місце слабка збіжність

$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t > 0, \varepsilon \rightarrow 0$, в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t), D_0(t)$, $t > 0$, визначається генератором

$$L_t \varphi(v, w) = \frac{a^2 \rho^2}{2t^2} \varphi''_w(v, w) + \frac{a}{t} C^{(2)}(v, w) \varphi'_v(v, w), \quad (14)$$

де

$$C^{(2)}(v, w) = vb + ac_2 \sqrt{t}w,$$

$$b := ac_2 + \frac{1}{2}.$$

Висновок 1. Граничний процес флуктуацій $\zeta(t)$, $t > 0$, визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\zeta(t) = \frac{a}{t} b \zeta(t) dt + \sigma dw(t),$$

де $w(t)$ - гаусівський процес з дисперсією $\sigma^2 = a^2 \rho^2$.

3. Властивості нормованої флуктуації $v^\varepsilon(t)$.

Лема 1. Нормована флуктуація (9) задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dv^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} \nabla_{b(t)} C(\varepsilon(\frac{v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + C_0^\varepsilon(t)), x(\frac{t}{\varepsilon^4})) dt + \frac{v^\varepsilon(t)}{2t} dt. \quad (15)$$

Доведення. Диференціюючи (9) і враховуючи (1) та (12) маємо (15).

Наслідок 1. Супроводжуюча флуктуація $v_x^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \sqrt{t} [u_x^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)]$ задовольняє диференціальне рівняння

$$dv_x^\varepsilon(t) = \frac{v_x^\varepsilon(t)}{2t} dt + \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} \nabla_{b(t)} C(\varepsilon z, x) dt, x \in X, \quad (16)$$

де

$$z = \frac{v_x^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + w, w = C_0^\varepsilon(t). \quad (17)$$

Доведення. Використання системи (3) в схемі доведення Лема 1 дає (16).

Наслідок 2. Рівняння (16) допускає асимптотичне представлення

$$dv_x^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^{-1} a}{\sqrt{t}} C^{(1)}(x) dt + \frac{a}{t} [\sqrt{t} z C^{(2)}(x) + \frac{v_x^\varepsilon(t)}{2a}] dt + \theta_x^\varepsilon dt, x \in X, \quad (18)$$

в позначеннях (17), а знехтуючий член θ_x^ε такий, що $\|\theta_x^\varepsilon\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Використовуючи (4) для функції $\nabla_{b(t)} C(\varepsilon z, x)$ з (16) маємо розклад

$$C(\varepsilon z, x) = C^{(1)}(x) + \varepsilon z C^{(2)}(x) + \varepsilon^2 z^2 C_3(\varepsilon z, x), \quad (19)$$

де $C_3(\varepsilon z, x)$ обчислюємо за представленням (6). Зауважимо, що останній доданок в (19) має порядок малості $o(\varepsilon^2)$.

Підставляючи (19) в (16) отримуємо (18).

Розглянемо півгрупи $C_{t+s}^\varepsilon(x) \varphi(v) = \varphi(v_x^\varepsilon(t+s)), v_x^\varepsilon(t) = v$, що породжуються системою (16) з генератором

$$C_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = \left[\frac{v}{2t} + \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} \nabla_{b(t)} C(\varepsilon z, x) \right] \varphi'(v), \quad (20)$$

де z обчислюємо в (17).

Наслідок 3. Генератор (20) півгрупи $C_{t+s}^{\varepsilon, \iota}(x)$, $x \in X$, має асимптотичне представлення

$$\begin{aligned} \text{мовою). } C_t^\varepsilon(x)\varphi(v) &= \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} C^{(1)}(x)\varphi'(v) + \\ &+ \frac{a}{t} C^{(2)}(v, w, x) + \theta_C^\varepsilon(x)\varphi'(v), \quad (21) \end{aligned}$$

де

$$C^{(2)}(v, w, x) = \sqrt{t} z C^{(2)}(x)\varphi'(v) + \frac{v}{2a}.$$

Доведення. В (20) для функції $\nabla_{b(t)} C(\varepsilon z, x)$ використаємо розклад (19).

Для дифузійного збурення (10) розглянемо півгрупи

$$C_{t+s}^{0, \iota}(x)\varphi(w) = \varphi(C_0^\varepsilon(u(t+s); x)), C_0^\varepsilon(u(t); x) = w,$$

з генератором

$$C_0^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \frac{a}{t} C_0(x)\varphi'(w). \quad (22)$$

4. Компенсуючий оператор. Розглянемо КО для розширеного процесу марковського відновлення

$$v_n^\varepsilon := v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), w_n^\varepsilon := C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \quad (23)$$

де $\tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4 \tau_n$, $n \geq 0$,

що визначається співвідношенням

$$L_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) := \varepsilon^{-4} q(x) [E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) |$$

$$v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] - \varphi(v, w, x)]$$

Лема 2. Компенсуючий оператор (24) має аналітичне представлення

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) &= \varepsilon^{-4} q(x) \int_0^\infty G_x(ds) \times \\ &\times [C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, \iota}(x) C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, \iota}(x) P - I] \varphi(v, w, x), \quad (25) \end{aligned}$$

де оператор P визначається через ядро $P(x, B)$, $B \in X$,

$$P\varphi(x) := \int_x P(x, dy)\varphi(y).$$

Доведення. Розглянемо приріст компоненти v_{n+1}^ε процесу (23) при $x_n^\varepsilon = x$ і $\tau_n^\varepsilon = t$ в вигляді

$$\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon = v_x^\varepsilon(\varepsilon^4 \theta_x), \quad (26)$$

де $v_x^\varepsilon(t)$ є розв'язком рівняння (16) з початковою умовою $v_x^\varepsilon(0) = 0$.

Аналогічно маємо приріст для w_{n+1}^ε

$$\Delta w_n^\varepsilon := C_{n+1}^\varepsilon - C_n^\varepsilon = C_0^\varepsilon(\varepsilon^4 \theta_x). \quad (27)$$

Враховуючи (26) і (27) та використовуючи півгрупи $C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, \iota}(x)$ та $C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, \iota}(x)$ для умовного математичного сподівання з (24) маємо перетворення

$$E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) | v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] =$$

$$E_{v, w, x}[\varphi(v + v_0(\varepsilon^4 \theta_x), w + C_0^\varepsilon(\varepsilon^4 \theta_x), x_{n+1}^\varepsilon)] =$$

$$\int_0^\infty G_x(ds) C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, \iota}(x) C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, \iota}(x) P\varphi(v, w, x).$$

З останнього і з означення (24), маємо (25).

Лема 3. Компенсуючий оператор (25) на тест-функціях $\varphi(v, w, \cdot) \in C^{3,3}(R \times R)$ допускає асимптотичне представлення

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) &= [\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} \frac{a}{t} Q_1(x) P + \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} Q_2(x) P + \\ &+ \frac{a}{t} Q_3(x) P + \theta_L^\varepsilon(x)] \varphi(v, w, x), \quad (28) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Q_1(x)\varphi(v, w) &= C_0(x)\varphi'_w(v, w), Q_2(x)\varphi(v, w) = \\ &= (1 + \frac{z}{\sqrt{t}}) C^{(1)}(x)\varphi'_v(v, w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3(x)\varphi(v, w) &= [C^{(2)}(v, w, x)\varphi'_v(v, w) + \\ &+ \frac{a}{t} \mu_2(x) C_0^2(x)\varphi''_w(v, w) + \frac{z^2}{2} C_0^{(2)}(x)\varphi''_w(v, w)] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\mu_2(x) = \frac{g_2(x)}{2g(x)}, \text{ а залишковий член } \theta_L^\varepsilon(x)$$

такий, що

$$\|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v, w, x)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доведення. Використаємо алгебраїчну тотожність

$$abP - I = P - I + (ab - I)P$$

для підінтегрального виразу в (25), покладаючи $C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, \iota}(x) = a$ і $C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, \iota}(x) = b$.

Таким чином з (25) маємо

$$L_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} q(x) [P - I] \varphi(v, w, x) +$$

$$+ \varepsilon^{-4} q(x) \int_0^{\infty} G_x(ds) [C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, t}(x) C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, t}(x) - I] P \varphi(v, w, x),$$

або

$$L_{t,0}^{\varepsilon} \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} Q \varphi(v, w, x) + \varepsilon^{-4} q(x) L_{0,t}^{\varepsilon} P \varphi(v, w, x), \quad (29)$$

де

$$L_{0,t}^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} G_x(ds) [C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, t}(x) C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, t}(x) - I]. \quad (30)$$

В свою чергу оператор $L_{0,t}^{\varepsilon}$ має представлення

$$L_{0,t}^{\varepsilon} = L_a + L_b + L_{ab},$$

де

$$L_a = \int_0^{\infty} G_x(ds) [C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, t}(x) - I], \quad (31)$$

$$L_b = \int_0^{\infty} G_x(ds) [C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, t}(x) - I], \quad (32)$$

$$L_{ab} = \int_0^{\infty} G_x(ds) [C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon, t}(x) - I] \times [C_{t+\varepsilon^4 s}^{0, t}(x) - I].$$

Встановимо асимптотичні розклади для (31)-(33). Інтегруючи (31) по частинах з використанням генератора (20) маємо

$$L_a = \varepsilon^4 g(x) (\varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} C^{(1)}(x) + \frac{za}{\sqrt{t}} C^{(2)}(x) + \frac{v}{2t}) + o(\varepsilon^6). \quad (34)$$

Аналогічно для (32), використовуючи генератор (22), отримуємо

$$L_b = \varepsilon^2 g(x) \frac{a}{t} C_0(\varepsilon z, x) + \varepsilon^4 \frac{a^2}{t^2} \frac{g_2(x)}{2} C_0^2(\varepsilon z, x) + o(\varepsilon^6). \quad (35)$$

Використаємо формулу розкладу (4) для $\tilde{N}_0(\varepsilon z, x)$ та в результаті отримаємо:

$$L_b = \varepsilon^2 g(x) \frac{a}{t} C_0(x) + \varepsilon^3 g(x) \frac{za}{t} C_0^{(1)}(x) + \varepsilon^4 \frac{a}{t} [\frac{a}{t} \frac{g_2(x)}{2} C_0^2(x) + \frac{z^2}{2} C_0^{(2)}(x)] + o(\varepsilon^5), \quad (36)$$

де

$$C_0^{(1)}(x) = C_{0'}(0; x), C_0^{(2)}(x) = C_{0''}(0; x)$$

І нарешті для (33), враховуючи обидва генератори (20) і (22) маємо

$$L_{ab} = o(\varepsilon^6). \quad (37)$$

Підставляючи (34)-(37) в (30), і результат в (29) отримуємо (28).

5. Розв'язок проблеми сингулярного збурення. Заключним кроком доведення Теорема є використання розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного до оператора (28).

$$L_{t,0}^{\varepsilon} \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} \frac{a}{t} Q_1(x) P + \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} Q_2(x) P + \frac{a}{t} Q_3(x) P \quad (38)$$

на

тест-функціях

$$\varphi^{\varepsilon}(v, w, x) = \varphi(v, w) + \varepsilon^2 \frac{1}{t} \varphi_2(v, w, x) + \varepsilon^3 \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi_3(v, w, x) + \varepsilon^4 \frac{1}{t} \varphi_4(v, w, x). \quad (39)$$

Лема 4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (38) на тест-функціях (39) визначає граничний оператор L формуло

$$LP = \frac{a^2}{t} P Q_1(x) R_0 Q_1(x) P - \frac{a^2}{t} P g(x) Q_1^2(x) P + P Q_3(x) P \quad (40)$$

в позначеннях Лема 3.

Доведення. Слідуючи [3], розділ 5, представлення оператора $L_{t,0}^{\varepsilon}$ на тест-функціях

$\varphi^{\varepsilon}(v, w, x)$ має вигляд

$$L_{t,0}^{\varepsilon} \varphi^{\varepsilon}(v, w, x) = \frac{1}{t} L \varphi(v, w) + \theta_L^{\varepsilon}(x) \varphi(v, w), \quad (41)$$

з нехтуго чим доданком $\theta_L^{\varepsilon}(x) \varphi(v, w)$, таким, що $\|\theta_L^{\varepsilon}(x) \varphi(v, w)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Враховуючи (36) та (37) для розв'язку проблеми сингулярного збурення для оператора (39) маємо систему рівнянь

$$Q \varphi(v, w) = 0, \quad (42)$$

$$Q \varphi_2(v, w, x) + a Q_1(x) P \varphi(v, w) = 0, \quad (43)$$

$$Q \varphi_3(v, w, x) + a Q_2(x) P \varphi(v, w) = 0, \quad (44)$$

$$Q \varphi_4(v, w, x) + \frac{a}{t} Q_1(x) P \varphi_2(v, w, x) +$$

$$+ a Q_3(x) P \varphi(v, w) = L_t(x). \quad (45)$$

Рівняння (42) має місце для всіх тест-функцій, що не залежать від аргументу $x \in X$, (див. (8)).

З умови балансу УБ1 маємо

$$PQ_1(x) = PC_0(x) = \int_x \pi(dx)C_0(x) = q \int_x \rho(dx)C_0(x) = 0.$$

Отже розв'язок рівняння (43) можна подати в вигляді (див. [3])

$$\varphi_2(v, w, x) = aR_0Q_1(x)\varphi(v, w). \quad (46)$$

Аналогічно з виконання умови УБ2 отримуємо

$$PQ_2(x) = PC^0(x) = \int_x \pi(dx)C^0(x) = q \int_x \rho(dx)C^0(x) = 0.$$

Таким чином для рівняння (44) маємо розв'язок

$$\varphi_3(v, w, x) = aR_0Q_2(x)\varphi(v, w).$$

З рівняння (45) маємо представлення граничного оператора L в вигляді (див. [3], розділ 5),

$$L = \Pi L_t(x) \Pi.$$

Підставляючи (46) в (45) і враховуючи те, що

$$PR_0 = R_0 + g(x)[\Pi - I],$$

маємо (40).

6. Доведення Теорема. Спочатку відзначимо, що розв'язок проблеми сингулярного збурення для $L_{t,0}^{\varepsilon}$ в (38) визначає той самий

розв'язок для оператора L_t^{ε} в (28) з малим доданком (див. твердження 5.1 [3]). Отже для отримання граничного оператора (14) достатньо обчислювати праву частину в (40). Враховуючи оператори $Q_1(x)$ і $Q_3(x)$ Лема 3 з (40) маємо

$$L\varphi(v, w) = \frac{a^2}{2t} \rho^2 \varphi_w''(v, w) + aC^{(2)}(v, w)\varphi_v'(v, w), \quad (47)$$

в позначеннях Теорема. Використовуючи (47) та множник $1/t$ в (41) визначаємо граничний оператор (14).

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСО в R^d , $d > 1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Список використаних джерел

1. *Ljung L., G. Pflug, H. Walk* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems – Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, – 1992. – 113P.
2. *Nevelson M.S., Khasminsky R.Z.* Stochastic Approximation and Recurrence Evaluation. – Nauka, Moscow – 1972. – 332 p. (in Russian).

3. *Koroliuk V., Linnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, – World Scientific Publishing, 2005. – 330P
4. *Koroliuk V. S., Tubin A.F.* Semi-Markov process and applications – Kiyv Nayk. dumka, 1976. – 184p.
5. *Koroliuk V. S., Svicshuk A.V.* Semi-Markov random evolutions – Kiyv Nayk. dumka, 1992. – 246p.
6. *Kukurba V.R., Yarka Y.B.* Convergence of stochastic optimization procedure in semi-Markov media // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. №1, 2012, P. 64-69.

Надійшла до редколегії 13.03.2013