КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2013

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.7

Кукурба В.Р.[1] аспірант,
Чабанюк Я.М.[1] д.ф.-м.н., проф.,
Кінаш А.В.[2] студентка.

Асимптотична дифузійність флуктуацій неперервної оптимізаційної процедури в напівмарковському середовищі

Розглянуто асимптотичну дифузійність флуктуацій неперервної процедури стохастичної оптимізації в випадку коли функція регресії має сингулярно збурений доданок, який залежить від зовнішнього середовища, що описується рівномірно ергодичним напівмарковським процесом. Використано асимптотичні властивості компенсуючого оператора напівмарковського процесу для побудови генератора граничного дифузійного процесу.

Ключові слова: асимптотична дифузійність, напівмарковський процес.

[1] Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, e-mail: rector@lp.edu.ua

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1.

V.R. Kukurba[1] post-graduate
Ya.M. Chabanyuk[1], PhD.
A.V. Kinash[2], student.

Asymptotic diffusivity of fluctuation of continuous stochastic optimization procedure in semi-Markov media.

The asymptotic diffusivity of fluctuation of continuous stochastic approximation procedure in the case when the regression function hew the singular perturbation addition, where dependent with on the external media, that is described by uniformly ergodic semi-Markov process. Asymptotic properties of compensative operator of semi-Markov process for creating generator of limited diffusion process.

Key words: asymptotic diffusivity, semi-Markov process.

[1] Lviv Polytechnic National University , 79013, Lviv, Bandera street, 12, e-mail: rector@lp.edu.ua

[2] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska str., 1.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Вступ. Поряд з збіжністю процедури стохастичної оптимізації (ПСО) [1] важливою властивістю ПСО є асимптотична поведінка флуктуацій в околі точки екстремуму функції регресії, яка в свою чергу характеризує швидкість збіжності ПСО. В класичних схемах [2] дослідження асимптотичної дифузійності реалізується використовуючи принцип інваріантності для процесів в неперервній ПСО.

В даній роботі для неперервної ПСО з асимптотично дифузійним збуренням в схемі дифузійної апроксимації з малим параметром $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$, в напівмарковському середовищі встановлено асимптотичну дифузійність флуктуацій навколо точки рівноваги усередненої динамічної системи.

1. Постановка задачі. Розглянемо неперервну ПСО в напівмарковському середовищі[6] в схемі дифузійної апроксимації

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^4)), \qquad (1)$$

де

$$C^\varepsilon(u;x) = \nabla_{b(t)}C(u;x) + \\ + \varepsilon^{-1}C_0(u;x) \qquad (2)$$

де $\nabla_{b(t)}C(u;x) = \dfrac{(C(u+b(t);x) - C(u-b(t);x))}{2b(t)}$,

$u \in R$. Функція регресії $C^\varepsilon(u;x)$, $u \in R$, $x \in X$ задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем.

$$du_x^\varepsilon(t)/dt = C^\varepsilon(u_x^\varepsilon(t);x), x \in X. \qquad (3)$$

Функція регресії $C(u;x)$ така, що $C(u;\cdot)\in C^3(R)$, тобто допускає наступний розклад псевдо градієнта

$$\nabla_{b(t)}C(u;x)=C^{(1)}(x)+uC^{(2)}(x)+ +u^2C_{(3)}(u;x), \qquad (4)$$

де

$$C^{(1)}(x)=C'(0;x), C^{(2)}(x)=C''_u(0;x), \qquad (5)$$

$$C^{(3)}(x)=C''_u(\theta u,x), 0\le\theta\le 1. \qquad (6)$$

Нехай для збурення $C_0(u;x)$ функції регресії (2) виконується умова балансу

$$\acute{O}\acute{A}1: \Pi C_0(0;x):=\int_X \rho(dx)C_0(x)=0,$$

де $\rho(B), B\in X$, - стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n:=x(\tau_n), n\ge 0$, в напівмарковський процес $x(t), t>0$, в стандартному фазовому просторі станів (X,X) з лічильним процесом

$$\nu(t):=\max\{n:\tau_n\le t\}, t\ge 0,$$

для моментів марковського відновлення $\tau_n, n\ge 0$ [3]. Напівмарковське ядро

$$Q(x,B,t):=P(x,B)G_x(t), \qquad (7)$$

де $x\in X, B\in X, t\ge 0$,

задає напівмарковський процес $x(t), t>0$. В (7) стохастичне ядро $P(x,B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n\ge 0$,

$$P(x,B)=P\{x_{n+1}\in B|x_n=x\},$$

з функцією розподілу $G_x(t):=P\{\theta_{n+1}\le t|x_n=x\}=:P\{\theta_x\le t\}$. Разом з напівмарковський процесом $x(t), t>0$, розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t>0$, з генератором [3]

$$Q\varphi(x):=q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)],$$

де $q(x):=1/g(x)$, $g(x):=\int_0^\infty \overline{G}_x(t)dt$, $\overline{G}_x(t):=1-G_x(t)$. Супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t>0$, є рівномірно ергодичний [4] з стаціонарним розподілом $\pi(B), B\in X$. Між стаціонарними розподілами $\pi(B)$ та $\rho(B)$ існує зв'язок [6]

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx), q:=\int_X \pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx)=\rho(dx)g(x)/m, m:=\int_X \rho(dx)g(x)=1/m.$$

Розподіли $\pi(B)$ та $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\widetilde{\Pi}$ відповідно співвідношеннями:

$$\Pi\varphi(x):=\widetilde{\varphi}1(x), \widetilde{\varphi}:=\int_X \pi(dx)\varphi(x), 1(x)\equiv 1, x\in X, (8)$$

$$\widetilde{\Pi}\varphi(x):=\widetilde{\varphi}1(x), \widetilde{\varphi}:=\int_X \rho(dx)\varphi(x), 1(x)\equiv 1, x\in X.$$

При відповідних умовах на нормуючі функцію $a(t), b(t), t>0$, неперервна ПСО (1) збігається з ймовірністю одиниця до точки екстремуму $u^*=0$ усередненої системи

$$du(t)/dt=C'(u),$$

де

$$C(u):=\int_X \pi(dx)C(u;x).$$

Таким умовам задовольняють функції

$$a(t)=a/t, b(t)=b/t^{1/4}, 0<t_0<t, a,b>0$$

які і будуть розглядатися надалі в ПСО (1). З того, що $u^*=0$ має місце рівність

$$C'(0)=0,$$

Враховуючи (5) та (8) додаткову умову балансу

$$\acute{O}\acute{A}2: \Pi C^0(x)=0.$$

Асимптотична нормальність ПСО (1) досліджується для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sqrt{t}[u^\varepsilon(t)-\varepsilon C_0^\varepsilon(t)], \qquad (9)$$

де дифузійне збурення $C_0^\varepsilon(t)$ визначається через $C_0(u;x)$ з (2):

$$C_0^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-2}a\int_{t_0}^t C_0(u^\varepsilon(s);x(\frac{s}{\varepsilon^4}))\frac{1}{s}ds. \qquad (10)$$

Зауважимо, що збурення (10) задовольняє рівняння

$$\frac{dC_0^\varepsilon(t)}{dt}=\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(u^\varepsilon(t);x(\frac{t}{\varepsilon^4})). \qquad (11)$$

В позначенні

$$\widetilde{v}^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(t)-\varepsilon C_0^\varepsilon(t)$$

флуктуація (9) має представлення

$$v^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t),$$

або в зворотній формі

$$\widetilde{v}(t)=\frac{\varepsilon v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}}.$$

З іншої сторони з (9) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon\left[\frac{v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + C_0^\varepsilon(t)\right]. \quad (12)$$

Зауваження 1. Для збурення $C_0^\varepsilon(t)$ буде доведена слабка збіжність

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t>0, \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^2}{t^2},$$

а

$$\sigma^2 = 2a^2\int_X \pi(dx)C_0(x)R_0C_0(x). \quad (13)$$

В (12) R_0 - потенціал до оператора Q [3], такий, що виконуються співвідношення

$$QR_0 = R_0Q = \Pi - \mathrm{I},$$

де I - тотожній оператор.

2. Теорема. При умовах збіжності ПСО (1) та при додаткових умовах УБ1, УБ2 а також

$$D1: \rho^2 := \sigma^2 + \sigma_\mu > 0,$$

де σ^2 обчислюється в (13), а

$$\sigma_\mu = qa^2\int_X \rho(dx)\mu(x)C_0^2(x), \mu(x) := g_2(x) - 2g^2(x),$$

$$D2: c_2 < -\frac{1}{2a},$$

де

$$c_2 := q\int_X \rho(dx)C^{(2)}(x),$$

має місце слабка збіжність

$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t>0, \varepsilon \to 0$, в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t), D_0(t)$, $t>0$, визначається генератором

$$\mathrm{L}_t\varphi(v,w) = \frac{a^2\rho^2}{2t^2}\varphi''_w(v,w) + $$
$$+\frac{a}{t}C^{(2)}(v,w)\varphi'_v(v,w), \quad (14)$$

де

$$C^{(2)}(v,w) = vb + ac_2\sqrt{t}w,$$

$$b := ac_2 + \frac{1}{2}.$$

Висновок 1. Граничний процес флуктуацій $\zeta(t)$, $t>0$, визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\zeta(t) = \frac{a}{t}b\zeta(t)dt + \sigma dw(t),$$

де $w(t)$ - гаусівський процес з дисперсією

$$\sigma^2 = a^2\rho^2.$$

3. Властивості нормованої флуктуації $v^\varepsilon(t)$.

Лема 1. Нормована флуктуація (9) задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dv^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon(\frac{v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + C_0^\varepsilon(t)), x(\frac{t}{\varepsilon^4}))dt +$$
$$+\frac{v^\varepsilon(t)}{2t}dt. \quad (15)$$

Доведення. Диференціюючи (9) і враховуючи (1) та (12) маємо (15).

Наслідок 1. Супроводжуюча флуктуація $v_x^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}[u_x^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)]$ задовольняє диференціальне рівняння

$$dv_x^\varepsilon(t) = \frac{v_x^\varepsilon(t)}{2t}dt + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)dt, x \in X, \quad (16)$$

де

$$z = \frac{v_x^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + w, w = C_0^\varepsilon(t). \quad (17)$$

Доведення. Використання системи (3) в схемі доведення Леми 1 дає (16).

Наслідок 2. Рівняння (16) допускає асимптотичне представлення

$$dv_x^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^{-1}a}{\sqrt{t}}C^{(1)}(x)dt +$$

$$+\frac{a}{t}[\sqrt{t}zC^{(2)}(x) + \frac{v_x^\varepsilon(t)}{2a}]dt + \theta_x^\varepsilon dt, x \in X, \quad (18)$$

в позначеннях (17), а знехтуючий член θ_x^ε такий, що $\|\theta_x^\varepsilon\| \to 0, \varepsilon \to 0$.

Доведення. Використовуючи (4) для функції $\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)$ з (16) маємо розклад

$$C(\varepsilon z, x) = C^{(1)}(x) + \varepsilon zC^{(2)}(x) +$$
$$+\varepsilon^2z^2C_3(\varepsilon z, x), \quad (19)$$

де $C_3(\varepsilon z, x)$ обчислюємо за представленням (6). Зауважимо, що останній доданок в (19) має порядок малості $o(\varepsilon^2)$.

Підставляючи (19) в (16) отримуємо (18).

Розглянемо півгрупи $C_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^\varepsilon(t+s)), v_x^\varepsilon(t) = v$, що породжуються системою (16) з генератором

$$C_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = [\frac{v}{2t} + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)]\varphi'(v), \quad (20)$$

де z обчислюємо в (17).

Наслідок 3. Генератор (20) півгруп $C_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)$, $x \in X$, має асимптотичне представлення

мовою). $C_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^{(1)}(x)\varphi'(v) +$

$$+\frac{a}{t}C^{(2)}(v,w,x)) + \theta_C^\varepsilon(x)\varphi'(v), \quad (21)$$

де

$$C^{(2)}(v,w,x) = \sqrt{t}zC^{(2)}(x)\varphi'(v) + \frac{v}{2a}.$$

Доведення. В (20) для функції $\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)$ використаємо розклад (19).

Для дифузійного збурення (10) розглянемо півгрупи

$C_{t+s}^{0,t}(x)\varphi(w) = \varphi(C_0^\varepsilon(u(t+s);x)), C_0^\varepsilon(u(t);x) = w$,

з генератором

$$C_t^0(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(x)\varphi'(w). \quad (22)$$

4. Компенсуючий оператор. Розглянемо КО для розширеного процесу марковського відновлення

$$v_n^\varepsilon := v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), w_n^\varepsilon := C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \quad (23)$$

де $\tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4\tau_n, n \geq 0$,

що визначається співвідношенням

$$L_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) := \varepsilon^{-4}q(x)[E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) \mid$$

$$v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] - \varphi(v,w,x)]$$

Лема 2. Компенсуючий оператор (24) має аналітичне представлення

$$L_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)\int_0^\infty G_x(ds) \times$$

$$\times[C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\, C_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)P - I]\varphi(v,w,x), \quad (25)$$

де оператор P визначається через ядро $P(x,B), B \in X$,

$$P\varphi(x) := \int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Доведення. Розглянемо приріст компоненти v_{n+1}^ε процесу (23) при $x_n^\varepsilon = x$ і $\tau_n^\varepsilon = t$ в вигляді

$$\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon = v_x^\varepsilon(\varepsilon^4\theta_x), \quad (26)$$

де $v_x^\varepsilon(t)$ є розв'язком рівняння (16) з початковою умовою $v_x^\varepsilon(0) = 0$.

Аналогічно маємо приріст для w_{n+1}^ε

$$\Delta w_n^\varepsilon := C_{n+1}^\varepsilon - C_n^\varepsilon = C_0^\varepsilon(\varepsilon^4\theta_x). \quad (27)$$

Враховуючи (26) і (27) та використовуючи півгрупи $C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)$ та $C_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)$ для умовного математичного сподівання з (24) маємо перетворення

$$E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) \mid v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] =$$

$$E_{v,w,x}[\varphi(v + v_0(\varepsilon^4\theta_x), w + C_0^\varepsilon(\varepsilon^4\theta_x), x_{n+1}^\varepsilon)] =$$

$$\int_0^\infty G_x(ds) C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\, C_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x) P\varphi(v,w,x).$$

З останнього і з означення (24), маємо (25).

Лема 3. Компенсуючий оператор (25) на тест-функціях $\varphi(v,w,\cdot) \in C^{3,3}(R \times R)$ допускає асимптотичне представлення

$$L_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = [\varepsilon^{-4}Q + \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}Q_1(x)P + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}Q_2(x)P +$$

$$+\frac{a}{t}Q_3(x)P + \theta_L^\varepsilon(x)]\varphi(v,w,x), \quad (28)$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v,w) = C_0(x)\varphi_w'(v,w), Q_2(x)\varphi(v,w) =$$

$$= (1 + \frac{z}{\sqrt{t}})C^{(1)}(x)\varphi_v'(v,w),$$

$$Q_3(x)\varphi(v,w) = [C^{(2)}(v,w,x)\varphi_v'(v,w) +$$

$$+\frac{a}{t}\mu_2(x)C_0^2(x)\varphi_w''(v,w) + \frac{z^2}{2}C_0^{(2)}(x)\varphi_w''(v,w)] \quad (24)$$

$\mu_2(x) = \dfrac{g_2(x)}{2g(x)}$, а залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)$ такий, що

$$\| \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x) \| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Використаємо алгебраїчну тотожність

$$abP - I = P - I + (ab - I)P$$

для підінтегрального виразу в (25), покладаючи $C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x) = a$ і $C_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x) = b$.

Таким чином з (25) маємо

$L_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)[P - I]\varphi(v,w,x) +$

$$+\varepsilon^{-4}q(x)\int_0^\infty G_x(ds)[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)C^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I]P\varphi(v,w,x),$$

або

$$L^\varepsilon_t\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi(v,w,x)+$$
$$+\varepsilon^{-4}q(x)L^\varepsilon_{0,t}P\varphi(v,w,x), \qquad (29)$$

де

$$L^\varepsilon_{0,t}=\int_0^\infty G_x(ds)[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)C^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I]. \qquad (30)$$

В свою чергу оператор $L^\varepsilon_{0,t}$ має представлення

$$L^\varepsilon_{0,t}=L_a+L_b+L_{ab},$$

де

$$L_a=\int_0^\infty G_x(ds)[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I], \qquad (31)$$

$$L_b=\int_0^\infty G_x(ds)[C^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I], \qquad (32)$$

$$L_{ab}=\int_0^\infty G_x(ds)[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I]\times$$
$$\times[C^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I].$$

Встановимо асимптотичні розклади для (31)-(33). Інтегруючи (31) по частинах з використанням генератора (20) маємо

$$L_a=\varepsilon^4 g(x)(\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^{(1)}(x)+$$
$$+\frac{za}{\sqrt{t}}C^{(2)}(x)+\frac{v}{2t})+o(\varepsilon^6). \qquad (34)$$

Аналогічно для (32), використовуючи генератор (22), отримуємо

$$L_b=\varepsilon^2 g(x)\frac{a}{t}C_0(\varepsilon z,x)+$$
$$+\varepsilon^4\frac{a^2}{t^2}\frac{g_2(x)}{2}C_0^2(\varepsilon z,x)+o(\varepsilon^6). \qquad (35)$$

Використаємо формулу розкладу (4) для $\tilde{N}_0(\varepsilon z,x)$ та врезультаті отримаємо:

$$L_b=\varepsilon^2 g(x)\frac{a}{t}C_0(x)+\varepsilon^3 g(x)\frac{za}{t}C_0^{(1)}(x)+$$
$$+\varepsilon^4\frac{a}{t}[\frac{a}{t}\frac{g_2(x)}{2}C_0^2(x)+\frac{z^2}{2}C_0^{(2)}(x)]+o(\varepsilon^5), \qquad (36)$$

де

$$C_0^{(1)}(x)=C_{0'}(0;x),C_0^{(2)}(x)=C_{0''}(0;x)$$

І нарешті для (33), враховуючи обидва генератори (20) і (22) маємо

$$L_{ab}=o(\varepsilon^6). \qquad (37)$$

Підставляючи (34)-(37) в (30), і результат в (29) отримуємо (28).

5. Розв'язок проблеми сингулярного збурення. Заключним кроком доведення Теореми є використання розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного до оператора (28).

$$L^\varepsilon_{t,0}\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}Q_1(x)P+$$
$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}Q_2(x)P+\frac{a}{t}Q_3(x)P \qquad (38)$$

на тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varphi(v,w)+\varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x)+$$
$$+\varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x)+\varepsilon^4\frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x). \qquad (39)$$

Лема 4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (38) на тест-функціях (39) визначає граничний оператор L формуло

$$L\Pi=\frac{a^2}{t}\Pi Q_1(x)R_0Q_1(x)\Pi- \qquad (33)$$
$$-\frac{a^2}{t}\Pi g(x)Q_1^2(x)\Pi+\Pi Q_3(x)\Pi \qquad (40)$$

в позначеннях Леми 3.

Доведення. Слідуючи [3] , розділ 5, представлення оператора $L^\varepsilon_{t,0}$ на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v,w,x)$ має вигляд

$$L^\varepsilon_{t,0}\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\frac{1}{t}L\varphi(v,w)+\theta^\varepsilon_L(x)\varphi(v,w), \qquad (41)$$

з знехтую чим доданком $\theta^\varepsilon_L(x)$ $\varphi(v,w)$, таким, що $\|\theta^\varepsilon_L(x)\varphi(v,w)\|\to 0,\varepsilon\to 0$.

Враховуючи (36) та (37) для розв'язку проблеми сингулярного збурення для оператора (39) маємо систему рівнянь

$$Q\varphi(v,w)=0, \qquad (42)$$
$$Q\varphi_2(v,w,x)+aQ_1(x)P\varphi(v,w)=0, \qquad (43)$$
$$Q\varphi_3(v,w,x)+aQ_2(x)P\varphi(v,w)=0, \qquad (44)$$

$$Q\varphi_4(v,w,x)+\frac{a}{t}Q_1(x)P\varphi_2(v,w,x)+$$
$$+aQ_3(x)P\varphi(v,w)=L_t(x). \qquad (45)$$

Рівняння (42) має місце для всіх тест-функцій, що не залежать від аргументу $x \in X$, (див. (8)).

З умови балансу УБ1 маємо

$$\Pi Q_1(x) = \Pi C_0(x) = \int_X \pi(dx) C_0(x) = q \int_X \rho(dx) C_0(x) = 0.$$

Отже розв'язок рівняння (43) можна подати в вигляді (див. [3])

$$\varphi_2(v, w, x) = aR_0 Q_1(x) \varphi(v, w). \quad (46)$$

Аналогічно з виконання умови УБ2 отримуємо

$$\Pi Q_2(x) = \Pi C^0(x) = \int_X \pi(dx) C^0(x) = q \int_X \rho(dx) C^0(x) = 0.$$

Таким чином для рівняння (44) маємо розв'язок

$$\varphi_3(v, w, x) = aR_0 Q_2(x) \varphi(v, w).$$

З рівняння (45) маємо представлення граничного оператора L в вигляді (див. [3], розділ 5),

$$\mathrm{L} = \Pi \mathrm{L}_t(x) \Pi.$$

Підставляючи (46) в (45) і враховуючи те, що

$$\mathrm{P} R_0 = R_0 + g(x)[\Pi - \mathrm{I}],$$

маємо (40).

6. Доведення Теореми. Спочатку відзначимо, що розв'язок проблеми сингулярного збурення для $\mathrm{L}^{\varepsilon}_{t,0}$ в (38) визначає той самий розв'язок для оператора $\mathrm{L}^{\varepsilon}_t$ в (28) з малим доданком (див. твердження 5.1 [3]). Отже для отримання граничного оператора (14) достатньо обрахувати праву частину в (40). Враховуючи оператори $Q_1(x)$ і $Q_3(x)$ Леми 3 з (40) маємо

$$\mathrm{L}\varphi(v, w) = \frac{a^2}{2t} \rho^2 \varphi''_w(v, w) + aC^{(2)}(v, w) \varphi'_v(v, w), \quad (47)$$

в позначеннях Теореми. Використовуючи (47) та множник $1/t$ в (41) визначаємо граничний оператор (14).

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСО в R^d, $d > 1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Список використаних джерел

1. *Ljung L., G. Pflug, H. Walk* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems -- Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, – 1992. – 113P.
2. *Nevelson M.S., Khasminsky R.Z.* Stochastic Approximation and Recurrence Evaluation. – Nauka, Moscow –1972. – 332 p. (in Russian).
3. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, -- World Scientific Publishing, 2005. - 330P
4. *Koroliuk V. S., Tubin A.F.* Semi-Markov process and applications – Kiyv Nayk. dumka, 1976. –184p.
5. *Koroliuk V. S., Svicshuk A.V.* Semi-Markov random evolutions – Kiyv Nayk. dumka, 1992. –246p.
6. *Kukurba V.R., Yarka Y.B.* Convergence of stochastic optimization procedure in semi-Markov media // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. №1, 2012, P. 64-69.

Надійшла до редколегії 13.03.2013