

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

VII Міжнародна наукова конференція  
імені академіка І. І. Ляшка

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТА ПРИКЛАДНА  
МАТЕМАТИКА

м. Київ, 9, 10 жовтня 2014 р.

Матеріали конференції

Київ 2014

Гаркуша Н.И., Исследование экологической модели взаимодействия хищник-жертва с учетом последействия	34
Гасанов А.Б., Бабаева У.Р., Исследование образования фрактальных структур при фильтрации флюидов в слоистых пластах	35
Гриценко О.Ю., Ляшко С.І., Обґрунтування можливості побудови скінченно-різницевої схем з керованою штучною в'язкістю	36
Глебена М.І., Цегелик Г.Г., Метод розв'язування задач нелінійного програмування з негладкими цільовими функціями	37
Горун П., Чабанюк Я., Асимптотика генератора стрибкової оптимізації в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації	39
Гуляницький А.Л., Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь	41
Джалладова И. А., Исследование устойчивости решений стохастических систем нейтрального типа	42
Донченко В.С., Крак Ю.В., Голік А.О., Розпізнавання дактилем на основі геометричних характеристик контуру долоні	43
Жук Я.О., Васильєва Л.Я., Модель термоелектромеханічної поведінки шаруватих тонкостінних елементів конструкцій з пієзоактивними парами при гармонічному навантаженні	44
Зернов О.Є., Кузіна Ю.В., Про розв'язання та асимптотичну поведінку розв'язків деякої сингулярної задачі Коші неявиного виду	45
Івохін Є.В., Вадньов Д.О., Чисельний метод подання нечітких дійсних чисел у формі триплетів	46
Какойченко А.І., Моделювання ціноутворення фінансових інструментів з неперервним двостороннім аукціоном	48
Карабін Л. Д., Ключин Д. А., Задача про фазовий перехід для оптимального керування внутрішньопухлинним переносом ліків	50
Кіндибалюк А., Притула М., Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для нелінійних динамічних систем	52
Корянкіна Л.С., Череватенко А.Н., Про один підхід щодо розв'язання задачі ідентифікації багатозонної динамічної моделі	53
Кочкодан О. І., Моделювання і керування показниками Ляпунова в гратці зв'язаних осциляторів	55
Крак Ю.В., Кудїн Г.І., Соловйовик П.Г., Класифікація тактиком методом смугової віддільності	57
Кудїн В.І., Оноцький П.В., Про розв'язання розв'язків матричних трикутників у зв'язаних стратегіях методом бічних матриць	58
Купашев Д.І., Стабілізаційні методи обробки мікроскопічних зображень субстрат-	

малежних клітинних систем in vitro	60
Ладиков-Роев Ю.П., Черемных С.О., Яценко В.А., Моделирование осесимметричных бесплоских магнитных конфигураций в плазменном потоке	61
Лісняк В.С., Диференціальні інваріанти просторовоподібного векторного поля на півеквідній площині	62
Лісняк В.С., Пунктовано аксальний квазіевклідів простір та множення векторів у ньому	64
Лукьянов П.В., Когерентная структура компактного мезомасштабного вихря, обнаруженная во время численного эксперимента	66
Ляшко С.І., Теорема існування та єдиності для псевдонараболічних граничних задач	68
Макричич М.В., Кочкодан О.І., Яценко В.О., Чисельний алгоритм керування показниками Ляпунова	69
Михорт А.П., Про динаміку відкритої економічної системи та умови досягнення рівноваги	71
Музичук Ю., Метод граничних елементів у крайових задачах для нескінченних трикутних систем еліптичних рівнянь	73
Нагіря М.М., Деякі підходи до наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами	74
Пашко А.О., Точність і надійність моделювання гауссових випадкових процесів у рівномірній метриці	76
Перетятко А.С., Эффективность полуопределенной релаксации для решения общих квадратичных задач	78
Польца Г.С., Лісняк В.С., Вихідна пфафова система диференціальних рівнянь структури тетрааксального простору	79
Польца Г.С., Лісняк В.С., Інтегральні інваріанти конгруенції прямих півеквідного простору	80
Покутний А.А., Покутня Ю.А., Периодические решения абстрактного уравнения ван дер Поля	81
Потапенко Л.І., Чисельна модель гідродинаміки водоюм	82
Савкіна М.Ю., Метод найменших квадратів та ортогональна регресія: умови збігу оцінок параметрів	83
Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І., Асимптотичні солітоноподібні розв'язки сингулярно змученого рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами	85
Сандраков Г.В., Осреднение некоторых уравнений гидродинамики	87
Семенов В.В., Економіко-статистичні моделі дослідження соціальних процесів	89
Семенов В.В., Царук В.И., Проксимальный метод расщепления в геодезических метри-	

Функція  $M_f(x)$ , визначена на проміжку  $[x_0, x_n]$ , називається неklasичною мажорантою Ньютона функції  $y = f(x)$  на цьому проміжку.

Нехай  $M_f(x_i) = T_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Величини  $R_i = (T_{i-1}/T_i)^{1/(x_i - x_{i-1})}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $R_0 = 0$ ) і  $D_i = R_{i+1}/R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $D_0 = D_n = \infty$ ) називаються відповідно  $i$ -им числовим нахилом і  $i$ -им відхиленням діаграми Ньютона  $\delta_f$ .

Якщо точка зображення  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) знаходиться в вершині  $\delta_f$ , то індекс  $i$  називається вершинним індексом, якщо ж на  $\delta_f$ , то  $i$  діаграмним індексом. Індекси  $i = 0$  та  $i = n$  відносяться до вершинних індексів. Множину всіх вершинних індексів позначимо через  $I$ , а множину діаграмних індексів — через  $G$ . При цьому  $I \subset G$  і  $T_i = 0$  для всіх  $i \in G$ .

Нехай  $\varphi_i$  — кут між відрізком  $B_{x_{i-1}}B_{x_i}$  діаграми Ньютона  $\delta_f$  і додатним напрямком осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт  $k_i$  відрізка  $B_{x_{i-1}}B_{x_i}$  визначається за формулою

$$k_i = \frac{\kappa_{x_i} - \kappa_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-\ln T_i + \ln T_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \ln \left( \frac{T_{i-1}}{T_i} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}$$

Тому  $k_i = \ln R_i$ . Звідси випливає, що  $R_i = \exp(tg\varphi_i)$ ,  $D_i = \exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i)$ . Якщо  $\{i_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ;  $s \leq n$ ) — послідовність вершинних індексів  $\delta_f$ , то

$$0 = R_0 = R_{i_1} < R_{i_2} < \dots < R_{i_s} = R_n;$$

$$R_{i_k+1} = R_{i_k+2} = \dots = R_{i_{k+1}};$$

$$D_i \geq 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{i_k} > 1 \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Якщо  $p$  і  $q$  — два послідовні вершинні індекси  $\delta_f$ , то мажоранта Ньютона  $M_f(x)$  на проміжку  $[x_p, x_q]$  виражається формулою

$$M_f(x) = (a_p^{xq-x} \cdot a_q^{x-xp})^{\frac{1}{xq-xp}}$$

1. Глебена М.І. Чисельний метод покоординатного підйому відшукування абсолютного максимуму негладких і розривних функцій багатьох змінних / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". 2009. Вип. 7. С. 78-82.
2. Цегелик Г. Г. Теорія мажорант и діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. 1989. 41, №9. С. 1273-1276.

## АСИМПТОТИКА ГЕНЕРАТОРА СТРИВКОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Горун Павло, Чабанюк Ярослав

Pavlo.Gorun@gmail.com

(Національний університет "Львівська Політехніка", Україна, м. Львів)

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) у схемі дифузійної апроксиматії в марковському середовищі із сингулярним збуренням функції регресії задається співвідношенням (покладемо  $\sum_{n=0}^1 a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$ ) [1]:

$$u^\varepsilon(t) = u + \sum_{n=0}^{\nu(u/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon (\nabla_b C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon)), \quad u^\varepsilon(0) = u, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

в позначеннях [2],  $\nabla_b C(u; \cdot) = \{(C(u^+; \cdot) - C(u^-; \cdot))/2b(t)\}$ ,  $u^\pm = u(t)$ . Крім того,  $\gamma$  — показник нормування часу,  $\nu$  — лічильний процес моментів відновлення марковського процесу (МП)  $\tau_n$ ,  $x_n = x(\tau_n)$ ,  $n \geq 0$  — вкладений ланцюг Маркова у рівномірному ергодичний МП  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  у стандартному фазовому просторі станів  $(X, \mathcal{X})$  з генератором  $\mathcal{Q}$  [3] та потенціалом  $R_0$ . Функція регресії  $C(u; x)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$ , задовільняє умови існування глобального розв'язку супроводжуваних систем:

$$\frac{du_x(t)}{dt} = \nabla_b C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon), \quad x \in X$$

в припущенні існування та єдиності точки екстремуму  $u^*$ . В ПСО (1) мають місце вкладеності:

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \quad a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \tau_n/\varepsilon^{1/\gamma}, \quad n \geq 0.$$

Для узагальнення отриманих результатів розглянуто наступні керуючі функції:

$$a(t) = \frac{a}{t^\alpha}, \quad a > 0, \quad b(t) = \frac{b}{t^\beta}, \quad b > 0,$$

де  $\alpha, \beta$  такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) (див. [4, Теорема 1]):

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty.$$

Під збіжністю стрибкової ПСО (1) мається на увазі збіжність з ймовірністю 1 до точки рівноваги  $u^*$  (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що  $u^* = 0$ ) усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C^\varepsilon(u(t)), \quad C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x).$$

Нормована ПСО (1) має вигляд

$$v^\varepsilon(t) = t^\gamma (u^\varepsilon(t)/\varepsilon - C_0^\varepsilon(t)),$$

а

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{\nu(u/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon).$$

Розглянемо трьохкомпонентний МП

$$(v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^{1/\gamma}), t \geq 0).$$

Покладемо  $\alpha = 1, \gamma = 1/4$  (класичний випадок).

Нехай виконуються умови балансу для функції регресії  $C(u; x)$  та збурення  $C_0(u; x)$  відповідно:

$$\tilde{\Pi}C_0(0; x) = 0, \quad \tilde{\Pi}C'(0, x) = 0,$$

де  $\tilde{\Pi}$  - проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова  $x_n, n \geq 0$ , тобто  $\tilde{\Pi}\varphi(x) = \int_X \rho(dx)\varphi(x)$ .

**Лема.** Генератор МП (2) на тест-функціях  $\varphi(v; w) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = [\varepsilon^{-4}Q + \frac{\varepsilon^{-2}}{t}q(x)Q_1(x)P + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}}q(x)Q_2(x)P + \frac{1}{t}q(x)Q_3(x)P + \theta_t^\varepsilon(x)Q_0]\varphi(v; w; x),$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v; w; x) = aC_0(0; x)\varphi'_w;$$

$$Q_2(x)\varphi(v; w; x) = a \left( C'(0; x)\varphi'_v + \frac{v + t^{1/4}w}{t^{2/4}}C''_0(0; x)\varphi'_w \right);$$

$$Q_3(x)\varphi(v; w; x) = a[(v + t^{1/4}w)C'''(0; x)\varphi'_v + \frac{(v + t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}}C''_0(0; x)\varphi'_w] + \frac{v}{4}\varphi'_v + \frac{a^2}{2t}C''_0(0; x)\varphi''_w;$$

$$Q_0\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)\varphi(y),$$

а залишковий член  $\theta_t^\varepsilon(x)Q_0$  такий, що

$$\|\theta_t^\varepsilon(\cdot)Q_0\varphi(v; w; \cdot)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

1. Горун П.П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / Горун П.П., Чабанюк Я.М., Кукурба В.Р. // XVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2010, October 4-8, 2010). Київ: Освіта України. С. 54.
2. Горун П.П. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації. / Горун П.П., Чабанюк Я.М., Семенюк С.А. // Тези доповідей V Міжнародної наукової конференції OPTIMA-2012: "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". Кам'янець-Подільський, 2012. С. 27-28.
3. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / Korolyuk V., Linnios N. World Scientific Publishing, 2005. - 330 p.
4. Я.М. Чабанюк. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації / Я.М. Чабанюк, П.П. Горун // Збірник наукових праць інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: Фізико-математичні науки, 2012. - №6. - С.234-248.

## ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Гуляницький А.Л.

andriyhul@gmail.com

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x)u + \int_0^t \mathcal{B}(x, t, s)u(s) ds = f, \quad (1)$$

де  $u = u(x, t)$  невідома функція,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , де  $\Omega$  обмежена область з достатньо гладкою межею  $\partial\Omega, t \in [0, T]$ ;  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$  еліптичні диференціальні оператори другого порядку, що діють за просторовими змінними, причому  $\mathcal{A}$  є рівномірно еліптичним. Рівняння розглядатимемо з однорідними початковими і крайовими умовами:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Рівняння вигляду (1) застосовуються для моделювання теплопровідності й дифузії у середовищах з пам'яттю, для яких не виконуються класичні закони Фур'є і Фіка. У даній доповіді представлено теорему слабкої збіжності гальоркінських наближень у випадку, коли права частина  $f$  рівняння належить простору  $L_2([0, T], H^{-1}(\Omega))$ .

**Теорема.** Послідовність гальоркінських наближень  $\{u^m\}$  слабо збігається до узагальненого розв'язку  $u$  задачі (1) (2) у просторі  $L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$ .

1. А.В. Анискушин, А.Л. Гуляницький Обобщенная разрешимость параболических интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения 2014. 50, №1. с. 98-109.
2. А.Л. Гуляницький Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь // Журн. обчисл. та приклад. математики 2014. №1. С. 105-112.