Київський національний університет імені Тараса Шевченка

VII Міжнародна наукова конференція
імені академіка І. І. Ляшка

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

м. Київ, 9, 10 жовтня 2014 р.

Матеріали конференції

Київ 2014

Функція $M_f(x)$, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, називається некласичною маж рантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Нехай $M_f(x_i) = T_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. Величини $R_i = (T_{i-1}/T_i)^{1/(x_i - x_{i-}}$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ R_0 = 0)$ і $D_i = R_{i+1}/R_i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1; D_0 = D_n = \infty)$ називаться відповідно i-им числовим нахилом і i-им відхиленням діаграми Ньютона δ_f.

Якщо точка зображення P_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ знаходиться в вершині δ_f, то інде i називається вершинним індексом, якщо ж на δ_f, то діаграмним індексом. Індекс $i = 0$ та $i = n$ відносяться до вершинних індексів. Множину всіх вершинних індекс позначимо через I, а множину діаграмних індексів через G. При цьому $I \subset G$ і $T_i =$ для всіх $i \in G$.

Нехай φ_i кут між відрізком $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ діаграми Ньютона δ_f і додатним напрямко осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт k_i відрізка $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ визначається за формулою

$$k_i = \frac{\kappa_{x_i} - \kappa_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-lnT_i + lnT_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = ln\left(\frac{T_{i-1}}{T_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому $k_i = lnR_i$. Звідси випливає, що $R_i = exp(tg\varphi_i)$, $D_i = exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i)$ Якщо $\{i_k\}$ $(k = 1, 2, \dots, s; s \le n)$ - послідовність вершинних індексів δ_f, то

$$0 = R_0 = R_{i_1} < R_{i_2} < \ldots < R_{i_s} = R_n;$$

$$R_{i_k+1} = R_{i_k+2} = \ldots = R_{i_{k+1}};$$

$$D_i \ge 1\ (i = 0, 1, \dots, n);\ D_{i_k} > 1\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Якщо p і q два послідовні вершинні індекси δ_f, то мажоранта Ньютона $M_f(x)$ на проміжку $[x_p, x_q]$ виражається формулою

$$M_f(x) = \left(a_p^{x_q - x} \cdot a_q^{x - x_p}\right)^{\frac{1}{x_q - x_p}}.$$

1. *Глебена М.І.* Чисельний метод покоординатного підйому відшукання абсолютного максимуму негладких і розривних функцій багатьох змінних / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик// Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". 2009. Вип. 7. С. 78 82.
2. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. 1989. **41**, №9. С. 1273 1276.

АСИМПТОТИКА ГЕНЕРАТОРА СТРИБКОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Горун Павло, Чабанюк Ярослав

Pavlo.Gorun@gmail.com

(Національний університет "Львівська Політехніка", Україна, м. Львів)

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) у схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі із сингулярним збуренням функції регресії задається співвідношенням (покладемо $\sum_{n=0}^{-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$) [1]:

$$u^\varepsilon(t) = u + \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon \left(\nabla_b C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon)\right), \quad u^\varepsilon(0) = u,\ t \ge 0, \tag{1}$$

в позначеннях [2], $\nabla_b C(u; \cdot) = \{(C(u^+; \cdot) - C(u^-; \cdot))/2b(t)\}$, $u^\pm = u(t)$. Крім того, γ показник нормування часу, ν лічильний процес моментів відновлення марковського процесу (МП) τ_n, $x_n = x(\tau_n)$, $n \ge 0$ вкладений ланцюг Маркова у рівномірно ергодичний МП $x(t)$, $t \ge 0$ у стандартному фазовому просторі станів $(X, \mathcal{X})$з генератором Q [3] та потенціалом R_0. Функція регресії $C(u; x)$, $u \in \mathbb{R}$, $x \in X$, задовільняє умови існування глобального розв'язку супроводжуючих систем:

$$\frac{du_x(t)}{dt} = \nabla_b C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon),\ x \in X$$

в припущенні існування та єдиності точки екстремуму u^*. В ПСО (1) мають місце вкладеності:

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon),\ x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon),\ a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \tau_n/\varepsilon^{1/\gamma},\ n \ge 0.$$

Для узагальнення отриманих результатів розглянуто наступні керуючі функції:

$$a(t) = \frac{a}{t^\alpha},\ a > 0, \quad b(t) = \frac{b}{t^\beta},\ b > 0,$$

де α, β такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) (див. [4, Теорема 1]):

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t) b(t) < \infty.$$

Під збіжністю стрибкової ПСО (1) мається на увазі збіжність з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^* (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $u^* = 0$) усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)), \quad C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x).$$

Нормована ПСО (1) має вигляд

$$v^\varepsilon(t) = t^\gamma \left(u^\varepsilon(t)/\varepsilon - C_0^\varepsilon(t)\right),$$

де

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon).$$

Розглянемо *трьохкомпонентний* МП

$$\left(v^{\varepsilon}(t),\ C_0^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon} = x(t/\varepsilon^{1/\gamma}),\ t \geq 0\right).$$

Покладемо $\alpha = 1, \gamma = 1/4$ (класичний випадок).

Нехай виконуються умови балансу для функції регресії $C(u;x)$ та збурення $C_0($
відповідно:

$$\widetilde{\Pi}C_0(0;x) = 0, \qquad \widetilde{\Pi}C'(0,x) = 0,$$

де $\widetilde{\Pi}$ - проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Ма
кова $x_n,\ n \geq 0$, тобто $\widetilde{\Pi}\varphi(x) = \int_X \rho(dx)\varphi(x)$.

Лема. *Генератор МП (2) на тест-функціях $\varphi(v;w\cdot) \in C^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ має аси*
потичне представлення:

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v;w;x) = [\varepsilon^{-4}Q + \frac{\varepsilon^{-2}}{t}q(x)Q_1(x)\mathbf{P} + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}}q(x)Q_2(x)\mathbf{P} +$$
$$+\frac{1}{t}q(x)Q_3(x)\mathbf{P} + \theta_t^{\varepsilon}(x)Q_0]\varphi(v;w;x),$$

де

$$\begin{aligned}
Q_1(x)\varphi(v;w;x) &= aC_0(0;x)\varphi'_w;\\
Q_2(x)\varphi(v;w;x) &= a\left(C'(0;x)\varphi'_v + \frac{v+t^{1/4}w}{t^{2/4}}C'_0(0;x)\varphi'_w\right);\\
Q_3(x)\varphi(v;w;x) &= a[(v+t^{1/4}w)C''(0;x)\varphi'_v + \frac{(v+t^{1/4})^2}{2t^{2/4}}C''_0(0;x)\varphi'_w] +\\
&\quad + \frac{v}{4}\varphi'_v + \frac{a^2}{2t}C_0^{\prime 2}(0;x)\varphi''_w;\\
Q_0\varphi(x) &= q(x)\int_X P(x,dy)\varphi(y),
\end{aligned}$$

а залишковий член $\theta_t^{\varepsilon}(x)Q_0$ такий, що

$$\|\theta_t^{\varepsilon}(\cdot)Q_0\varphi(v;w;\cdot)\| \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ t \to \infty.$$

1. *Горун П.П.* Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / Горун П.П., Чабанюк Я.М., Кукурба В.Р. //XVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties"(PDMU-2010, October 4-8, 2010). Київ: Освіта України. С. 54.
2. *Горун П.П.* Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації. /Горун П.П. Чабанюк Я.М., Семенюк С.А. //Тези доповідей V Міжнародної наукової конференції OPTIMA-2012: "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". Кам'янець-Подільський, 2012. С. 27-28.
3. *Korolyuk V.* Stochastic Systems in Merging Phase Space /Korolyuk V., Limnios N. World Scientific Publishing, 2005. 330 p.
4. *Я.М. Чабанюк.* Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації / Я.М. Чабанюк, П.П. Горун //Збірник наукових праць інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та Кам'янець-Подільського національно університету імені Івана Огієнка. Серія: Фізико-математичні науки, 2012. - №6. - С.234-248.

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Гуляницький А.Л.

andriyhul@gmail.com

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x)u + \int_0^t \mathcal{B}(x,t,s)u(s)\,ds = f, \tag{1}$$

де $u = u(x,t)$ невідома функція, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω обмежена область з достатньо
гладкою межею $\partial\Omega$, $t \in [0,T]$; $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ еліптичні диференціальні оператори другого
порядку, що діють за просторовими змінними, причому $\mathcal{A}$ є рівномірно еліптичним.
Рівняння розглядатимемо з однорідними початковими і крайовими умовами:

$$u|_{t=0} = 0, u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Рівняння вигляду (1) застосовуються для моделювання теплопровідності й дифузії у середовищах з пам'яттю, для яких не виконуються класичні закони Фур'є і Фіка. У даній доповіді представлено теорему слабкої збіжності гальоркінських наближень у випадку, коли права частина f рівняння належить простору $L_2([0,T], H^{-1}(\Omega))$.

Теорема. Послідовність гальоркінських наближень $\{u^m\}$ слабко збігається до узагальненого розв'язку u задачі (1) (2) у просторі $L_2([0,T], H_0^1(\Omega))$.

1. *А.В. Анікушин, А.Л. Гуляницький* Обобщенная разрешимость параболических интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения 2014. **50**, №1. с. 98-109.
2. *А.Л. Гуляницький* Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь // Журн. обчисл. та приклад. математики 2014. №1. С. 105-112.