Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 11

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2014

УДК 519.6:519.7
ББК 22
М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до переліку наукових фахових видань ВАК України з фізико-математичних наук (постанова Президії ВАК України від 14 жовтня 2009 р. № 1-05/4, Бюлетень ВАК України №11, 2009)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 9 від 25 вересня 2014 року.

М34 **Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки** : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — 244 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7
ББК 22

ISSN 2308-5878

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Physical and mathematical sciences

Scientific journal

ISSUE 11

Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University
2014

UDC 519.6:519.7

Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences : scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University ; [editorial board: Yu. G. Krivonos (executive editor) and others]. — Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University, 2014. — ISSUE 11. — 244 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.
For scientific and technical staff, postgraduate students.

ISSN 2308-5878

УДК 519.612

В. С. Абрамчук*, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Абрамчук,** старший викладач

*Вінницький державний педагогічний університет
імені М. Коцюбинського, м. Вінниця,
**Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

ЕФЕКТИВНІ МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ ВИБОРУ БАЗИСНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Запропоновані чисельні та наближені методи розв'язування крайових задач. Чисельні методи розв'язування лінійних крайових задач ґрунтуються на упорядкуванні матриці різницевого рівняння на максимально укрупнені ортогональні підсистеми. Наближені методи ґрунтуються на апроксимації розв'язку функціями на основі ростків многочлена Тейлора.

Ключові слова: *різницеве еліптичне рівняння, методи мінімальних нев'язок, похибок у просторах* AE, $A^T E$, *ростки многочлена Тейлора, метод зважених нев'язок, обернені задачі для динамічних систем.*

Вступ. Різницева апроксимація багатовимірних диференціальних еліптичних рівнянь, що описують задачі динаміки в'язкої рідини і тепломасоперенесення, приводить до необхідності розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з матрицями великих порядків, сильно розрідженими і погано обумовленими. Коректні способи апроксимації диференціальних операторів зберігають властивість еліптичності крайової задачі для різницевих схем [1–4].

Для розв'язування різницевих рівнянь постійно розробляються нові алгоритми [1–4]. Тому існує проблема вибору найбільш ефективних методів, що одночасно володіють високою швидкістю збіжності, обчислювальною стійкістю, простотою реалізації алгоритмів і мінімальними потребами комп'ютерних ресурсів. Зростання числа нових методів і способів їх алгоритмічної реалізації приводить до необхідності порівняння їх ефективності при розв'язуванні різницевих еліптичних рівнянь.

1. Постановка проблеми. Обґрунтувати, що кольорове упорядкування змінних у відповідності до фарбування вузлів сітки дискретизації лінійного диференціального еліптичного оператора у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2,3$, мінімальним числом фарб так, щоб кожен вузол шаблону був іншого кольору, приводить до максимально укрупнених ортогональних підсистем матриці різницевого рівняння.

ЗМІСТ

Виписавши $F(t, x(t), x(t-r))$ і перевіривши умову (4), одержимо умову асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $y(t) \equiv 0$ системи (11) у вигляді нерівності $2a(a^2r^2 - c^2) > b^2r^4$.

Для дослідження стохастичних диференціально-різнецевих рівнянь Іто-Скорохода із запізненням слід розглядати функціонали Ляпунова-Красовського [7–9].

Висновки. Досліджено стохастичну рівномірну стійкість систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь. Одержано достатні умови асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціально-різницевого рівняння Іто з багатьма сталими загаюваннями.

Список використаних джерел:

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 352 с.
2. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1968. — 354 с.
3. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1982. — 612 с.
4. Свердан М. Л. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем / М. Л. Свердан, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Снятин : Вид-во «Над Прутом», 1996. — 448 с.
5. Королюк В. С. Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики / В. С. Королюк, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2005. — 525 с.
6. Королюк В. С. Теорія ймовірностей. Комп'ютерний практикум / В. С. Королюк, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2011. — 487 с.
7. Ясинский В. К. Устойчивость и оптимальное управление стохастическими динамическими системами со всей предысторией / В. К. Ясинский, И. В. Ясинский. — К. : Вид-во «ТВіМС», 2004. — 363 с.
8. Ясинський В. К. Задачі стійкості і стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський. — К. : Вид-во «ТВіМС», 2005. — 580 с.
9. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2011. — 738 с.
10. Kushner H. J. Approximations and weak convergence methods for random processes / H. J. Kushner. — MIT Press, 1984. — 252 p.

We obtain the sufficient contitions of the asymptotic uniformely stochastic stability of a trivial solution of the Cauchy problem for the stochastic differential-difference Ito equation with many constant delays.

Key words: *stochastic differential-difference equation, uniformely stochastic stability.*

Отримано: 19.09.2014

УДК 519.21+62

А. В. Кінаш*, аспірант,
Я. М. Чабанюк**, д-р фіз.-мат. наук,
У. Т. Хімка*, канд. фіз.-мат. наук

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,
**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

АСИМПТОТИЧНА ДИСИПАТИВНІСТЬ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ

У роботі представлено дифузійний процес з сингулярно збуреним доданком з марковськими переключеннями. Встановлено вигляд генератора двокомпонентного марковського процесу в схемі дифузійної апроксимації. Знайдено розв'язок проблеми сингулярного збурення на збуреній функції Ляпунова. Встановлено умову асимптотичної дисипативності дифузійного процесу.

Ключові слова: *стохастичний процес, дифузія, дисипативність.*

Вступ. Проблема дисипативності системи виникла при розгляді дисипації енергії. Дисипативність детермінованих та випадкових систем з адитивним випадковим збуренням було розглянуто в роботах Хасмінського Р.З. [1,2], Самойленка А.М. та Станжицького О.М. [3], Мазурова О. Ю. [4], Brogliato B. [5] та інших.

У цій статті асимптотична дисипативність дифузійного процесу встановлюється на основі дисипативності граничного дифузійного процесу [1] та модельної граничної теореми [6].

Основний результат. Розглядається стохастичний процес з дифузійним збуренням [6], що визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + \\ +\sigma(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dw(t), \tag{1}$$

де $u(t)$ — випадкова еволюція, $t \geq 0$; $C_0(u;x)$ — сингулярне збурення функції регресії $C(u;x), u \in \boldsymbol{R}^d$; $w(t)$ — вінерівський процес; $\sigma(u;x)$ — дифузія, $x(t)$ — марковський процес в просторі $(X, \boldsymbol{X})$ з стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ [6].

Генератор марковського процесу визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X Q(x;dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \tag{2}$$

Для генератора $\boldsymbol{Q}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$, визначений потенціал $\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$ — проектор на підпростір нулів оператора $\boldsymbol{Q} : N_{\boldsymbol{Q}} = \{\varphi : \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}$ [6].

Гранична еволюція для системи (1) має представлення

$$du(t) = a(u)dt + \sigma(u)dw(t), \tag{3}$$

де

$$a(u) = \int_X C_0(u;x)R_0C_0^{'}(u;x)\pi(dx) + \int_X C(u;x)\pi(dx), \tag{4}$$

а гранична дифузія $\sigma(u)$ визначається зі співвідношення

$$\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u),$$

де

$$B(u) = 2\int_X C_0(u;x)R_0C_0(u;x)\pi(dx) + \int_X \sigma^2(u;x)\pi(dx). \tag{5}$$

Усереднена функція регресії визначається співвідношенням

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u;x). \tag{6}$$

Виконується умова балансу

$$\Pi C_0(x) \equiv 0, \tag{7}$$

Оператор $\tilde{\mathbf{L}}(x)$ має представлення

$$\tilde{\mathbf{L}}(x)\varphi(u) = \left[a(u) - C_0(u;x)R_0C_0(u;x) - C(u;x)\right]\varphi'(u) +$$

$$+\left[\frac{1}{2}B(u) - C_0(u;x)R_0C_0(u;x) - \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\right]\varphi''(u).$$

Означення. Система (1) називається асимптотично дисипативною, якщо дисипативною є гранична еволюція (3) [1, с. 31].

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in \boldsymbol{C}^3(\boldsymbol{R}^d)$ системи

$$\frac{du}{dt} = a(u), \tag{8}$$

яка задовольняє умовам [6]

$$C1: \left|C_0(u;x)R_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]'\right| < M_1V(u), M_1 > 0;$$

$$C2: \left|C(u;x)R_0[C_0(u;x)V'(u)]'\right| < M_2V(u), M_2 > 0;$$

$$C3: \left|\sigma^2(u;x)R_0[C_0(u;x)V'(u)]''\right| < M_3V(u), M_3 > 0;$$

$$C4: \left|C(u;x)R_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]'\right| < M_4V(u), M_4 > 0;$$

$$C5: \left|\sigma^2(u;x)R_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]''\right| < M_5V(u), M_5 > 0.$$

Крім того при $c_1 > 0, c_2 > 0$ виконуються умови

$$a(u)V'(u) < -c_1V(u), \tag{9}$$

$$\sup_u \|\sigma(u)\| < c_2, \tag{10}$$

а також виконується умова балансу (7).

Тоді система (1) асимптотично дисипативна.

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу

$$u_t^\varepsilon := u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon := x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), t \ge 0$$

в банаховому просторі $B(\mathbf{R}^d, X)$ дійснозначних функцій $\varphi(u;x) \in \mathbf{C}^{2,0}(\mathbf{R}^d, X)$ має представлення

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u;x) + \boldsymbol{\Gamma}(x)\varphi(u;x), \tag{11}$$

де

$$\boldsymbol{\Gamma}(x)\varphi(u;x) = C(u;x)\varphi'(u;x) + \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x), \tag{12}$$

та

$$\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(u;x)\varphi'(u;x).$$

Доведення. Генератор марковського процесу на збуреній тест-функції визначається зі співвідношення:

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u;x)] \mid u_t^\varepsilon = u, x_t^\varepsilon = x]. \tag{13}$$

Для умовного математичного сподівання, маємо:

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon)][I(\theta_x > \Delta) + I(\theta_x < \Delta)],$$

де $I(\theta_x > \Delta)$ і $I(\theta_x < \Delta)$ — індикатори часу перебування в стані x. Функція розподілу часу перебування θ_x в стані x має показниковий розподіл, тому справедливими є співвідношення:

$$\begin{cases} I(\theta_t > \varepsilon^{-2}\Delta) = e^{-\varepsilon^{-2}q(t)\Delta} = 1 - \varepsilon^{-2}q(t)\Delta + o(\Delta); \\ I(\theta_t \le \varepsilon^{-2}\Delta) = 1 - e^{-\varepsilon^{-2}q(t)\Delta} = \varepsilon^{-2}q(t)\Delta + o(\Delta). \end{cases} \tag{14}$$

Підставляючи (14) в вираз для умовного математичного сподівання, отримуємо:

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x_{t+\Delta})](1 - \varepsilon^{-2}q(t)\Delta + o(\Delta)) +$$

$$+ E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon)](\varepsilon^{-2}q(t)\Delta + +o(\Delta)).$$

Розкладемо другий доданок за формулою Тейлора:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2}q(t)\Delta E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = \\ &= \varepsilon^{-2}q(t)[E_{u,x}\varphi(u;x) + E_{u,x}(\varphi'(u;x)\Delta u)]\Delta + o(\Delta). \end{aligned} \tag{15}$$

Звідси,

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x_{t+\Delta})] = E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x)] - \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x)]\Delta -$$

$$-\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]\Delta + \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x_{t+\Delta})]\Delta + o(\Delta).$$

Підставимо отримані результати в (13):

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x)]-\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x)]\Delta-$$

$$-\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]\Delta+\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x_{t+\Delta})]\Delta-\varphi(u;x)+o(\Delta).$$

До доданку $\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x_{t+\Delta})]\Delta$ застосуємо розклад (15):

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x_{t+\Delta})]\Delta=\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})]\Delta+$$

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u]\Delta+o(\Delta).$$

Підставляючи отримане співвідношення в рівняння генератора (13), отримуємо:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x)]+\varepsilon^{-2}q(x)\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})]-E_{u,x}[\varphi(u;x)]]\Delta+$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u]-E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]]\Delta-\varphi(u;x)+o(\Delta).$$

Розглянемо окремо доданок

$$q(x)\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})]-E_{u,x}[\varphi(u;x)]].$$

Враховуючи, що генератор марковського процесу має вигляд (2), то має місце рівність:

$$q(x)\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})]-E_{u,x}[\varphi(u;x)]]=\lim_{\Delta\to 0}\mathbf{Q}\varphi(u;x)=\mathbf{Q}\varphi(u;x).$$

Підставимо отриманий результат в рівняння (13):

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x)]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u]-E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]]-\varphi(u;x)+o(\Delta).$$

Обчислимо окремо другу границю:

$$\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u]-E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]].$$

Проінтегрувавши (1) в проміжку $[t;t+\Delta]$, отримаємо:

$$u_{t+\Delta}=u_t+\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s).$$

Звідси,

$$\Delta u=u_{t+\Delta}-u_t=\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s).$$

Отже,

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[E_{u,x}\left[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\left(\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)\right]-E_{u,x}\left[\varphi'(u;x)\left(\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)\right]\right]=0.$$

Враховуючи отримані результати, генератор (13), набуде вигляду:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)-\varphi(u;x)+o(\Delta)=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}\left[\varphi(u+\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.$$

$$\left.+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)\right]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)-\varphi(u;x)+o(\Delta).$$

Додамо і віднімемо у першому доданку $\varphi(z,x)$, де

$$z=u+\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds.$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}\left[\varphi(z+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)--\varphi(z;x)+\varphi(z;x)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}\left[\varphi(z+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)-\varphi(z;x)\right]+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(z;x)].$$

Застосуємо формулу Тейлора до першого доданку отриманого виразу:

$$E_{u,x}\left[\varphi(z+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)\right]=$$

$$=E_{u,x}[\varphi(z;x)]+E_{u,x}[\varphi'(z;x)]E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)+\quad(16)$$

$$+\frac{1}{2}E_{u,x}[\varphi''(z;x)]E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)^2+o(\Delta).$$

Враховуючи (15) і (16), для границі буде вірним:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}E_{u,x}[\varphi''(z;x)]\times\right.$$

$$\left.\times E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)^2\right]+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(z;x)]+o(\Delta).$$

Остаточно генератор набуває вигляду:

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}E_{u,x}[\varphi''(u+\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds;x)\right]E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)+$$

$$+E_{u,x}[\varphi(z;x)]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)-\varphi(u;x)+o(\Delta)=\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+\lim_{\Delta\to 0}E_{u,x}[\varphi(z;x)-\varphi(u;x)]+o(\Delta)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}E_{u,x}[\varphi(u;x)+(C(u;x)++\varepsilon^{-1}C_0(u;x))\varphi'(u;x)-\varphi(u;x)]+o(\Delta)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)+C(u;x)\varphi'(u;x)+\varepsilon^{-1}C_0(u;x)\varphi'(u;x).$$

Цей вигляд збігається з (11).

Лема 2. Граничний генератор $\mathbf{L}$ на збуреній тест-функції

$$\varphi^\varepsilon(u;x)=\varphi(u)+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x),\varphi(u)\in\mathbf{C}^3(\mathbf{R}^d) \tag{17}$$

визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi(u)]+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+ \\ +\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)+\varepsilon\theta, \tag{18}$$

де θ — залишковий член, який визначається зі співвідношення

$$\theta=\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x). \tag{19}$$

Доведення. Генератор (13) на збуреній тест-функції (17) має представлення:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0+\mathbf{\Gamma}][\varphi(u)+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)]=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0\varphi(u)+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\varepsilon\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u)+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi(u)]+$$

$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)]+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)].$$

Оскільки $\mathbf{Q}\in N_{\boldsymbol{Q}}$, то перший доданок задовольняє співвідношення

$$\mathbf{Q}\varphi(u)=0.$$

Звідси,

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi(u)]+[\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)]+ \\ +\varepsilon[\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)].$$

Позначивши

$$\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)=\theta,$$

генератор набуває вигляду (18).

Лема 3. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора $\mathbf{L}^\varepsilon$ на функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u;x)=V(u)+\varepsilon V_1(u;x)+\varepsilon^2V_2(u;x),V(u)\in\mathbf{C}^3(\mathbf{R}^d) \tag{20}$$

має вигляд:

$$\mathbf{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u;x)=\mathbf{L}V(u)+\varepsilon\theta(x)V(u), \tag{21}$$

де $\mathbf{L}$ — граничний генератор вигляду

$$\mathbf{L}V(u)=a(u)V'(u)+\frac{1}{2}B(u)V''(u),$$

І залишковий член $\theta(x)$ визначається співвідношенням

$$\theta(x)V(u)=\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)+\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u).$$

Доведення. Розглянемо дію генератора (18) на збурену функцію Ляпунова (20):

$$\mathbf{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u;x)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}V_1(u;x)+\mathbf{C}_0(x)V(u)]+[\mathbf{Q}V_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V_1(u;x)+ \\ +\mathbf{\Gamma}V(u)]+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}(x)V_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}(x)V_2(u;x)],$$

де $\mathbf{\Gamma}(x)V(u;x)$ визначається зі співвідношення (12).

Застосовуючи умову розв'язності проблеми сингулярного збурення, для функції $V_1(u;x)$ маємо:

$$\mathbf{Q}V_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V(u)=0;$$

$$\mathbf{Q}V_1(u;x)=-\boldsymbol{C}_0(x)V(u).$$

Звідси та з умови балансу (6), отримуємо вигляд $V_1(u;x)$:

$$V_1(u;x)=\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u). \tag{22}$$

Використовуючи другу умову розв'язності, має місце рівність:

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}(x)V(u)=\mathbf{L}V(u).$$

Підставимо (22) в останнє співвідношення:

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\mathbf{\Gamma}(x)V(u)=\mathbf{L}V(u);$$

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)=\mathbf{L}V(u)-\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)-\mathbf{\Gamma}(x)V(u); \tag{23}$$

Позначимо через $\mathbf{L}(x)V(u)$ вираз

$$\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\boldsymbol{\Gamma}(x)V(u)=\mathbf{L}(x)V(u) \tag{24}$$

і підставимо в рівняння (23):

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)=\mathbf{L}V(u)-\mathbf{L}(x)V(u), \tag{25}$$

де

$$\mathbf{L}=\Pi\mathbf{L}(x). \tag{26}$$

Через $\tilde{\mathbf{L}}(x)$ позначимо різницю $\tilde{\mathbf{L}}=\mathbf{L}-\mathbf{L}(x)$, тоді (25) буде мати вигляд

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)=\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u).$$

З останньої рівності отримаємо представлення функції $V_2(u;x)$:

$$V_2(u;x)=\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u). \tag{27}$$

Підставляючи (24) в вираз для граничного генератора (26), будемо мати

$$\mathbf{L}=\Pi\mathbf{L}(x)=\Pi\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)+\Pi\boldsymbol{\Gamma}(x). \tag{28}$$

Розглянемо окремо перший доданок:

$$\Pi\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)=\Pi C_0(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]'=$$

$$=\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]'\pi(dx)=\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)V'(u)\pi(dx)+$$

$$+\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)V''(u)\pi(dx).$$

Для другого доданку справедливим є співвідношення:

$$\Pi\boldsymbol{\Gamma}(x)V(u)=\Pi C(u;x)V'(u)+\frac{1}{2}\Pi\sigma^2(u;x)V''(u)=\int_X C(u;x)V'(u)\pi(dx)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_X\sigma^2(u;x)V''(u)\pi(dx).$$

Підставимо отримані значення в (28):

$$\mathbf{L}V(u)=\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)V'(u)\pi(dx)+\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)V''(u)\pi(dx)+$$

$$+\int_X C(u;x)V'(u)\pi(dx)++\frac{1}{2}\int_X\sigma^2(u;x)V''(u)\pi(dx)=$$

$$=\left[\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)\pi(dx)+\int_X C(u;x)V'(u)\pi(dx)\right]V'(u)+$$

$$+\left[\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)\pi(dx)+\frac{1}{2}\int_X\sigma^2(u;x)\pi(dx)\right]V''(u).$$

Отже, враховуючи (4) та (5), граничний генератор набуде вигляду:

$$\mathbf{L}V(u)=a(u)V'(u)+\frac{1}{2}B(u)V''(u), \tag{29}$$

що збігається з виразом для граничного генератора в умові леми.

Тепер, використовуючи вирази для функцій $V_1(u;x)$ і $V_2(u;x)$, можна знайти вигляд залишкового члена $\theta(x)$. Отже, підставляючи (22) та (27) в останній доданок генератора на збуреній функції Ляпунова, отримуємо залишковий член, вигляд якого збігається з виглядом наведеним в умові леми

$$\theta(x)V(u)=\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)+\boldsymbol{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u). \tag{30}$$

Таким чином, враховуючи рівняння (29) та (30), отримаємо вигляд генератора (21).

Доведення теореми. Розглянемо залишковий член (30).

Для першого доданку маємо:

$$\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)=C_0(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]'.$$

Враховуючи (12), для другого доданку буде справедливим:

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right|=\left|C(u;x)[\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)]'+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)[\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)]''\right|=$$

$$=\left|C(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]'+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]''\right|\le$$

$$\le\left|C(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]'\right|+\left|\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]''\right|.$$

З умов C2 і C3 теореми, маємо

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right|<M_2V(u)+\frac{1}{2}M_3V(u).$$

Позначивши через M_6 суму $M_2+\frac{1}{2}M_3$, отримуємо оцінку

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right|<M_6V(u). \tag{31}$$

З урахуванням умов C4 та C5 теореми, для третього доданку залишкового члена вірною є оцінка:

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)\right|=\left|C(u;x)[\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)]'+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)[\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)]''\right|=$$

$$=\left|C(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]'+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]''\right|\le$$

$$\le\left|C(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]'\right|+\left|\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]''\right|<M_4V(u)+\frac{1}{2}M_5V(u).$$

Аналогічно, через M_7 позначивши вираз $M_4+\frac{1}{2}M_5$, будемо мати:

$$\left|\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)\right|<M_7V(u). \tag{32}$$

Отже, з врахуванням умови C1 теореми, а також співвідношень (31), (32), для залишкового члена вірним є обмеження:

$$\left\|\theta(x)V(u)\right\|<MV(u), \tag{33}$$

де $M=M_1+M_6+\varepsilon M_7$.

Використовуючи твердження леми 3 і вираз (33) не важко перевірити умови Модельної граничної теореми ([6], с. 197), тобто має місце слабка збіжність процесів $u^{\varepsilon}(t)\to u(t)$ при $\varepsilon\to 0$.

Нехай тепер $\frac{d^{(1)}V(u)}{du}$ — похідна від функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії системи (3).

Оскільки функція Ляпунова $V(u)$ задовольняє умову Ліпшиця:

$$\left|V(u_2)-V(u_1)\right|<B\left|u_2-u_1\right|,$$

де B — константа, то справедливою буде наступна оцінка [1, с. 28]:

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du}\le\frac{dV(u)}{du}+B\left\|\sigma(u)\right\|\left|dw(t)\right|,$$

де $\frac{dV(u)}{du}$ — похідна від функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії детермінованої системи (8).

Застосовуючи умови теореми (9) і (10), отримуємо наступну оцінку для $\frac{d^{(1)}V(u)}{du}$:

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du}\le -c_1V(u)+Bc_2\left|dw(t)\right|.$$

Це дає можливість знайти оцінку функції Ляпунова $V(u)$ [1, с. 23]:

$$V(u)\le V(u_0)e^{\int_0^t -c_1ds}+\int_0^t e^{\int_s^t -c_1dp}Bc_2\left|dw(s)\right|ds.$$

Отже,

$$V(u)\le V(u_0)e^{-c_1t}+Bc_2\int_0^t e^{-c_1(t-s)}\left|dw(s)\right|ds.$$

Обчислюючи математичне сподівання обох частин нерівності, маємо:

$$EV(u)\le V(u_0)e^{-c_1t}+Bc_2\int_0^t e^{-c_1(t-s)}E\left|dw(s)\right|ds.$$

З властивостей вінерівського процесу та оцінки ([1, с.32)

$$\mathbf{P}\left\{\left|u(t)\right|>R\right\}\le\frac{EV(u)}{\inf\limits_u V(u)},\ R\to\infty,$$

випливає, що система (3) дисипативна.

Отже, з Модельної граничної теореми та дисипативності системи (3) слідує асимптотична дисипативність системи (1).

Висновки. Встановлена дисипативність вихідної випадкової еволюції з сингулярно збуреним доданком відносно малого параметру та марковськими переключеннями дає можливість поставити завдання про асимптотичну дисипативність такої еволюції з напівмарковськими переключеннями. Для цього спочатку необхідно встановити дифузійність граничного процесу через розв'язок проблеми сингулярного збурення для компенсуючого генератора вихідної еволюції та супроводжуючого марковського процесу [6].

Список використаних джерел:

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 368 с.
2. Хасьминский Р. З. О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями / Р. З. Хасьминский. — М., 1965. — С. 88–104.
3. Самойленко А. М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями : монографія / А. М. Самойленко, О. М. Станжицький. — К. : Наукова думка, 2009. — 336 с.
4. Mazurov A. Stochastic dissipativity with risk-sensitive storage function and related control problems / A. Mazurov, P. Pakshin. — Kumamoto : ICIC Express Letters, 2008. — Vol. 3, № 1. — P. 53–60.
5. Brogliato B. Dissipative Systems Analysis and Control / B. Brogliato et al. — L. : Springer, 2007. — 576 p.
6. Korolyuk V. S. Stochastic Systems in Merging Phase Space/ V. S. Korolyuk, N. Limnios. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.

In this paper we present a diffusion process with singular perturbation terms with Markov switching. The form of generator for two-component Markov process in a diffusion approximation scheme was established. We found the solution of singular perturbation problem for perturbed Lyapunov function. And set the condition for the asymptotic dissipativity of the diffusion process.

Key words: *stochastic process, diffusion, dissipativity.*

Отримано: 15.09.2014