

МОДЕЛІ НЕЧІТКИХ І ЙМОВІРНІСНИХ МІР НА РОЗБИТТІ ПРОСТОРУ СТАНІВ СКЛАДНИХ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Актуальність проблеми. Прийняття рішень на управління в складних агрегованих системах з участю колективів операторів і спеціалізованих систем АСУ-ТП в умовах невизначеності є складною науково-прикладною задачею, так як процедура формування стратегій управління включає чітке автоматичне керування і координаційне управління операторами. В складних ситуаціях можливий збій в оцінках ситуацій системою керування та неадекватна реакція операторів, що приводить відповідно до інформаційної дезорієнтації приймаючих рішення і створення умов для виникнення аварійних режимів. Тому важливим є побудова процедур об'єктивної оцінки ситуації з заданим рівнем достовірності та ризику прийняття рішень.

Нечіткі і ймовірнісні міри в процедурах розбиття простору станів, розпізнавання та класифікації визначають процедури синтезу алгоритмів управління.

При розв'язанні задач аналізу і синтезу систем в умовах невизначеності необхідна ймовірнісна інтерпретація опрацьованих даних для прийняття рішень, на основі виділених інформаційних ознак, які формуються на поняттях міри ймовірнісної та нечіткої. Розглянемо різні сторони трактування міри і її представлення [1].

I. Аксіоми теорії ймовірності і ймовірнісні міри задаються у вигляді (шкали для вимірювання невизначеності типу випадковості) $m: P(x) \rightarrow R_{[0,1]}$ для якої маємо аксіоми:

- 1) $A \subseteq X \Leftrightarrow m(A) \geq 0$;
- 2) $m(\emptyset) = 0$;
- 3) $(A, B \in X) \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

За зауваженням А. Кофмана [1] теорія нечітких множин не конкурент теорії ймовірності і статистичним методам, а заповнює пробіл в методах структуризованої невизначеності там де не можна примінити статистику і конструктивні методи теорії ймовірності, що є характерним для прийняття рішень на управління в умовах дії збурень на технічні системи при координаційному управлінні колективом операторів.

Розглянемо деякі аспекти процедур управління:

II. Суб'єктивна ймовірність – ступінь упевненості в даній події, що виникає в ЛППР на основі наявних даних про ситуацію (знань), а їх обробка ґрунтується на індивідуальних алгоритмах;

III. Нечітка міра в побудові інтегралів і мір можливості в процедурах виводу, як суб'єктивні шкали для виявлення нечіткості при розбитті на альтернативні класи цільового простору.

Означення 1. Функція $g(\cdot)$ визначена на полі борелевських множин на X називається нечіткою мірою якщо відповідає умовам:

$$g: B_X \rightarrow [0,1]: 1) g(\emptyset) = 0; 2) g(x) = 1; 3) [A, B \in B_X, A \subset B] \Rightarrow g(A) \leq g(B);$$

$$4) \left(F_n \in B_X, \left\{ F_n \right\}_{n=1}^{\infty} - \text{монотонна} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g\{F_n\} = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right).$$

Оцінка ступені нечіткості A , судження $(x \in A)$ суб'єктивності сумісництва x з A ґрунтується на нечіткій мірі в просторі (x, B_X, q) для якого маємо наступні представлення:

$$1. \forall A, B \in B_X : g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B));$$

$$2. \forall A, B \in B_X : g(A \cap B) \geq \max(g(A), g(B));$$

$$3. \forall A \in B_X : g(A) = g(x \in A);$$

$$4. \forall A, B \in B_X, A \cap B = \emptyset, \exists \lambda \in [-1, +\infty];$$

$$5. g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B),$$

де $g_\lambda(\cdot) - \lambda$ правило визначення міри.

Для цього правила маємо наступні вимоги які власне задають відповідні властивості моделей побудови розбиття просторів стану об'єктів:

$$a) \begin{cases} A \cup B = X - \text{умова нормування } g_\lambda - \text{міри,} \\ g_\lambda(x) = 1, \quad g_\lambda(\emptyset) = 0, \quad \lambda \in [-1, +\infty], \quad \lambda - \text{параметр нормування міри;} \end{cases}$$

$$б) \lambda > 0, \quad g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - \text{суперадитивна міра;}$$

$$в) \lambda \in [-1, 0], \quad g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - \text{субадитивна міра;}$$

$$г) \text{ верхня грань міри множини: } g_\lambda(\overline{A}) = [1 - g_\lambda(A)] \cdot [1 + \lambda g_\lambda(A)]^{-1};$$

$$д) \text{ інтервальна міра } \forall [a, b] \subset R \text{ задається:}$$

$$g_\lambda([a, b]) = [h(b) - h(a)] \cdot [1 + \lambda h(a)]^{-1},$$

де h — нечітка функція розподілу на інтервалі;

$$ж) \text{ точкова міра Дірака } \forall A \in B_X : \mu(A) = \begin{cases} 1, x_0 \in A \subset X \\ 0, x_0 \notin A, \end{cases}$$

тобто пункти б), в), д), ж) визначають класи алгоритмів в структурі процесу прийняття рішень.

Суперадитивні міри у функціях довіри для суджень (тверджень) виду $P[A(A \neq \emptyset)]^s \in [0,1]$ зі степеню $s \in [0,1]$ що описують ситуації в умовах

невизначеності, будуються у вигляді наступної процедури на розбитті множини B_x :

$$\forall B \in B_x : \exists b(B) = \begin{cases} 1, B = x; \\ s, B \supset x, B \neq x_s; \\ 0, B \not\subset A, \end{cases}$$

визначає функцію носія на A . Для цієї функції маємо наступні властивості на розбитті B_x :

1. $b(\emptyset) = 0; b(x) = 1; \forall A \in B_x : b(A) \in [0, 1]$;
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^n \in B_x : b\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n b(A_i) - \sum_{i=j} b(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} b\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$,

де $\{A_i\}_{i=1}^n$ — розбиття x .

Зв'язок функції довіри з мірою розмитості ґрунтується на властивості

$$\forall A \in B_x : \left[b(A) + b(\overline{A}) = 1 - \sum_{\substack{B \not\subset A \\ B \not\subset \overline{A}}} m(B) \right],$$

тоді узгоджена функція довіри буде мати відповідно представлення:

$$\forall B \in B_x : b(B) = \begin{cases} s, B = A; \\ 1 - s, B = x, \\ 0, B \neq A, B \neq x. \end{cases}$$

Для функції довіри (як міри вірогідності настання поділу) маємо наступні аксіоми, які виконуються на розбитті $(A, B) \in B_x$.

1. $b(\emptyset) = 0, \quad b(x) = 1$
2. $b(A \cap B) = \min(b(A), b(B)), \forall A \in B_x;$
3. $\min(b(A), b(\overline{A})) = 0;$
4. $\forall b, \exists A, B : b(A \cup B) > \max(b(A), b(B)).$

Субадитивні міри, як міри правдоподібності, спряжених з верхніми ймовірностями подій на борелівських розбиттях множини X , можна використати як інструмент оцінки моменту настання вірогідної події в системі.

Розглянемо основні властивості мір на B_x .

Міра правдоподібності $[Pl]$ визначається як спосіб опису достовірності подій A на множині X

$$1) Pl(A \subset X) = 1 - b(A \subset X); \quad 2) \forall A \in B_x : Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B),$$

для якої визначаються аксіоми

$$1) Pl(\emptyset) = 0, \quad 2) Pl(x) = 1; \quad 3) \forall \left(A_i \Big|_{i=1}^n \right) \subseteq X :$$

$$Pl\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n Pl(A_i) - \dots - \sum_{i \neq j} Pl(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^n Pl\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

При оцінці складних ситуацій та їх прогнозі міра можливості визначається функцією наступного вигляду $\Pi: B_x \rightarrow [0,1]$, яка задовільняє аксіомам на розбитті $\{A_{ij}\} \subset B_x$:

$$1) \Pi(\emptyset) = 0, \Pi(x) = 1; \quad 2) \forall i \in N, A_i \subset X, \Pi\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sup_{i \in N} \Pi(A_i);$$

3) умова нормування:

$$\exists \pi: x \rightarrow [0,1], \sup_{x \in X} \pi(x) = 1; \quad \forall A \in B_x: \Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x);$$

$$(\{x_i\} \subset X - \text{зчислене}) \mapsto \pi(x) = \Pi\left(\left\{x_i \Big|_{i=1}^n\right\}\right).$$

Міра ймовірності виступає як часткова міра від функції довіри (правдоподібності). Нечітка міра ($g \triangleq P$) буде мірою ймовірності якщо виконуються умови для розбиття $\{A_{ij}\}$ на B_x згідно аксіом теорії ймовірностей:

$$1) \forall A \in B_x: P(A) \in [0,1], P(\emptyset) = 0, P(x) = 1$$

$$2) (\forall i \in N, A_i \subset B_x, \forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset) \mapsto P\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \sum_{i \in N} P(A_i),$$

що визначають адитивну структуру міри на (B_x) -борелівській множині над простором станів.

Нечітка міра g_v по рівню значимості – v , пов'язує міру можливості, ймовірності при описі невизначеності, для якої виконуються умови:

- $v \in [0, 1]:$ 1. $v = 0$, g_v – міра можливості;
2. $v = 1$, g_v – ймовірнісна міра;
3. $v > 1$, g_v – розширення міри.

Для g_v виконуються аксіом, які власне визначають основні властивості міри на B_x :

1. $g_v(\emptyset) = 0, \quad g_v(x) = 1,$
2. $\forall i \in N, A_i \in B_x, \forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset,$

$$g_v\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = (1-v) \bigcup_{i \in N} g_v(A_i) + v \sum_{i \in N} g_v(A_i);$$

3. $\forall A, B \in B_X : (A \subseteq B) \mapsto (g_v(A) \leq g_v(B))$,

4. Умова нормування $g_v(\cdot)$ міри на розбитті $\{A_i\}$,

$$\left[g_v(x) = (1-v) \bigcup_{i \in N} g_i + v \sum_{i \in N} g_i = 1 \right],$$

тоді g_v - міри визначатимуть структуру алгоритму розбиття простору станів і відповідно класифікатора.

Розглянемо інтервальні апроксимації представлення функції міри v -рівня.

Для ранжування інтервалів змін в просторі станів складної системи для побудови класифікаторів ситуацій введемо розбиття множини X на інтервали

$$X = \bigcup_i \Delta_i, x_i \in \Delta_i, \Delta_i = \left[x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2} \right], \Delta \in R,$$

$$\Delta = (b-a)/(n-1), \quad a = \inf(x), b = \sup(x)$$

тоді маємо що, якщо $\Delta_i \in A \subset S \subset X$, а відповідно $\bigcup_i S_i = S$ - множина

підінтервалів на базовій множині X , то :

$$g_\lambda(x_i) = g_\lambda(\Delta_i) = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i=\theta} (\lambda g_\lambda(\Delta_i) + 1) - 1 \right],$$

$I_\theta = \{i | x_i \in \Delta_i \subset A\}$, $\Delta_i = \left[x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2} \right]$ - структура розбиття інтервалу I_θ в просторі станів системи $[I_\theta \times T_m]$ по термінальним часі T_m

Нечіткі інтеграли як моделі функціоналів на просторі подій $[R^2 \times T_m]$.

Для опису нечіткими мірами різних видів невизначеності на розподільних множинах використовується інтегральне поняття ступені нечіткості яка відповідає

рівневі важливості, впевненості в процедурах прийняття рішень.

Нечіткий інтеграл від функції h по нечіткій мірі g на множині $A \subseteq X$ визначається як математичне сподівання настання подій A в просторі станів:

$$\forall h : X \rightarrow [0,1], \quad \exists g(A), \quad g \neq 0; \quad \exists H_\alpha = \{x | h(x) > \alpha\}$$

$\oint_A h(x) \circ g = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge g(A \cap H_\alpha))$ - визначає нечітке очікування від розмитих A .

Розширення міри $\tilde{g}$ на $F(x)$ визначається у вигляді нечіткого інтегралу в просторі станів: $\tilde{g}(A) = f\mu_A \circ g$, $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, $\mu_A \in F(x)$.

Нечіткий інтеграл від функції $h: x \rightarrow [0,1]$ на нечіткій множині $\mu_A \in F(x)$ по нечіткій мірі g визначається у вигляді співвідношення композиції для функції належності μ і міри g

$$\bigcirc_{\mu_A} h(x) \circ g = \bigcirc_x (\mu_A(x) \wedge h(x)) \circ g,$$

де степінь належності нечіткій множині μ_A визначає ступінь нечіткості твердження $(x_0 \in A)$: з мірою достовірності настання подій A на X

$$g(x_0, A) = \int_x \mu_A(x) \circ g(x_{0i}) = \mu_A(x_0) /$$

Основні властивості нечітких інтегралів відносно логічних операцій на розбитті множини E .

$$\begin{aligned} 1) \bigcirc_E (h_1 \wedge h_2) \circ g &\leq \left(\bigcirc_E h_1 \circ g \right) \wedge \left(\bigcirc_E h_2 \circ g \right); \quad 2) \bigcirc_E (h_1 \wedge h_2) \circ g \geq \left(\bigcirc_E h_1 \circ g \right) \vee \left(\bigcirc_E h_2 \circ g \right); \\ 3) \bigcirc_{E \cup F} h \circ g &\geq \left(\bigcirc_E h \circ g \right) \vee \left(\bigcirc_F h \circ g \right); \quad 4) \bigcirc_{E \cap F} h \circ g \leq \left(\bigcirc_E h \circ g \right) \wedge \left(\bigcirc_F h \circ g \right), \end{aligned}$$

де E, F – непусті множини в просторі цілей $\Pi_C = \{R^n \times T_m\}$.

Спряження нечіткого інтеграла з представленням інтеграла Лебега дозволяє синтезувати процедури розбиття простору станів на функціональні області системи.

Нехай існує розбиття множини X на непересічні множини $\{E_i\}$ для яких виконуються умови адитивності і несумісності

$$E_i: X = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i, j, \quad i, j \in [1, n],$$

якщо: $h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{E_i}(x), \quad \alpha_i \in [0,1], \quad E_i \in B_x, \quad \text{а } f_{E_i}(x) \text{ — характеристична}$

функція для якої маємо наступні властивості (важливі для адитивних класифікаторів ситуацій в цільовому просторі системи):

$$\forall E_i \in B_x: (f_{E_i}(x) = 1) \equiv (x \in E_i); \quad (f_{E_i}(x) = 0) \equiv (x \notin E_i),$$

то для міри Лебега $\{l\}$ інтеграл від h на A буде мати наступне

представлення (адитивно-мультиплікативне): $\int_A h dl = \sum_{i=1}^n \alpha_i l(A \cap E_i),$ де

$i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, \alpha = \{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n\}$ – індекси ранжування достовірності.

Якщо маємо розбиття виду $E'_i = E_i \cup E_{i+1} \cdots \cup E_{i+n}$, а функція міри належності представлена у вигляді $h(x) = \max_{i \in [1, n]} \min(\alpha_i, f_{E'_i}(x))$, то вираз для нечіткого інтегралу буде мати вигляд

$$\int_A h(x) \circ g(\varepsilon, A) = \max_{i \in [1, n]} \min(\alpha_i, g(A \cap E'_i)),$$

який в загальному буде визначати модель класифікатора.

Порівняння нечіткого і Лебегового інтегралу ґрунтується на використанні ймовірнісної міри в процедурах побудови розпізнавачів образів ситуацій в просторі станів та цілей в умовах динамічної невизначеності.

Якщо: (x, B, P) – ймовірнісний простір; $h: x \rightarrow [0, 1]$ – B -вимірна функція; то процедура порівняння задається у вигляді

$$\left| \int_A f h(x) \circ P(\cdot) - \int_x h(x) \circ dP \right| \leq \frac{1}{4}, \text{ що визначає функціональні характеристики}$$

моделі дискримінатора вірогідності ситуацій в системі.

Процедура порівняння Сугено-фубіні інтегралів на основі нечітких мір (g_y, g_x) задається на композиції просторів станів складної системи $S_y \otimes S_x$. Якщо $(Y, B_x, g_y), (X, B_x, g_x)$ – простори з нечіткими мірами, $h: X \times Y \rightarrow [0, 1], \forall x \in X, \forall y \in Y$; то для міри $g = (g_y \times g_x)$ маємо вираз для

$$\text{інтегралів } Z = X \times Y \rightarrow \left[\int_A f h(x, y) \circ g = f \left(\int_{X \setminus Y} f h(x, y) \circ g_x \right) \circ g_y \right] - \text{що визначає}$$

достовірність складної події на $[S_x \times S_y]^m$.

Якщо h_n – монотонна послідовність (зростаюча) спадаюча B -вимірних функцій, а $\{a_n\}$ – послідовність дійсних чисел то для нечіткого інтеграла по мірі g маємо представлення:

$$f \left[\bigvee_{n=1}^m (a_n \wedge h_n) \right] \circ g = \bigvee_{n=1}^m [a_n \wedge f h_n \circ g]$$

– що визначає адитивну структуру функціонала подій.

Для будь-якого відображення просторів $\varphi: X \rightarrow Y$, відбувається індукція міри, тобто: $\varphi: B_x \rightarrow B_\varphi$, $\varphi: g \rightarrow g_\varphi$, $g^\varphi(F) = g(\varphi^{-1}F)$ – визначає композицію взаємозв'язків в настанні ланцюга подій.

Якщо задано класи множин можливих станів $(E \in B, F \in B_y)$, то індуктивна міра на них буде мати вигляд (умовна нечітка):

$$g\left(E \cap \varphi^{-1}(F)\right)=f \underset{F}{h(y)} \circ g^y, \quad \varphi=y, \quad F \subset Y;$$

тоді відповідно $\varphi:(x, B_x, g_x) \rightarrow (Y, B_y, g_y)$ визначає умовну нечітку міру $\rho(\cdot|\varphi=y)$ для якої маємо характеристики подій у вигляді $g(E)=f \rho(E|\varphi=y) \circ g^{\varphi}(\cdot)$; відповідно маємо $g_x(\cdot)=\int \underset{y}{\rho_x(\cdot|y)} \circ g_y$ – апріорна міра; $\rho_y(F|yx) \circ g_x = \int \underset{y}{\rho_x(E|y)} \circ g_y$ – апостеріорна міра.

Прийняття рішень в нечіткій обстановці є складною процедурою при дії багатьох факторів.

Процес прийняття рішень в нечіткій обстановці ґрунтується на інформаційній базисі, який враховує як оцінки ситуацій так і міри їх достовірності з точки зору ймовірності структури $\langle \theta, X, A, g_0(\cdot), \sigma_x(\cdot|\vartheta), l \rangle$, тоді стратегії прийняття рішень в умовах невизначеності відображає інформаційні перетворення $[(X, \theta), (g_0(\theta|x))] \xrightarrow{\{Y\}_A} \text{Strat} Y\{\mu_A: Y \rightarrow [0,1]\} \rightarrow (x \in A)$,

де θ – множина показників, які оцінюють об’єкт $x \in X$; g_0 – нечітка міра степені важливості показників; σ_x – нечітка міра важливості об’єктів; Y – множина дій; A – нечітка дія; l – функція належності нечіткого відношення на $\{X \times \theta, \theta \times Y\}$.

Важливим аспектом проблеми прийняття рішень є оцінка стратегій з точки зору прогнозованого ризику і рівня втрат при вибраних моделях досягнення цілі. Нечіткі втрати для розмитої дії визначаються через функцію належності у вигляді $l(\vartheta, A) = 1 - \max_{y \in Y} (\mu_A(y) \wedge (1 - l(\vartheta, y)))$, де $l(\cdot)$ функція втрат при оцінці події на A .

Нечітке очікування втрат визначається з умови

$$(l)_B = f \left[\underset{\theta \perp x}{f l(\vartheta|B(x)) \circ \sigma_x(\cdot|\vartheta)} \right] \circ g_\theta,$$

тоді розв’язок задачі в нечіткій обстановці при виборі стратегії прийняття рішень B буде: $\mu_{B_0}(x, y) = f(1 - l(\tau, y)) \circ \sigma_\theta(\cdot|x)$, де $\sigma_\theta(\cdot)$ – апостеріорна нечітка міра при формуванні стратегій типу класу B .

Висновки. Нечітка логіка прийняття рішень використовується для формалізації нечітких понять при аналізі динаміки складних об’єктів з точки зору семантики. Забезпечує ефективну обробку якісно-кількісної

інформації. Використання нечіткої логіки при оцінці динамічних ситуацій і побудові логічних висновків про стан об'єкта в моделях управління складними об'єктами є основою синтезу процедури діалогу в об'єктно-орієнтованих системах управління.

Література.

1. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982.— 432 с.
2. *Сікора Л.С.* Системологія прийняття рішень на управління в складних технологічних структурах. — Львів: Каменяр, 1998.—С.453.
3. *Дюбуа Д. и др.* Теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1990. — С.288.