Міністерство аграрної політики та продовольства України

ПРАЦІ
Таврійського державного агротехнологічного університету

Випуск 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка

Том 50

Наукове фахове видання

Мелітополь – 2011 р.

УДК 515.2: 514.18

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКТИВНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ТЕХНІКИ

Гумен О.М., к.т.н.,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"
Лясковська С.Є., к.т.н.,
Національний університет "Львівська політехніка"
Боднар Г.Й.,
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Шийко О.Я.
ТЗОВ «Октант»

Анотація – **матеріал статті присвячено обґрунтуванню можливості та практичної доцільності розв'язування прикладних задач техніки із залученням геометричних засобів проективних багатовимірних просторів, зокрема, в задачах моделювання процесів багатопараметричних систем.**

Ключові слова – **багатопараметричні системи, проективні багатовимірні простори, раціональні багатовиди.**

Постановка проблеми. Геометричне моделювання раціональних багатовидів як дієвий метод дослідження складних багатопараметричних процесів, об'єктів та систем науки і техніки все більше знаходить своє практичне застосування. Такий спосіб є найдоцільнішим з огляду на широке використання новітньої комп'ютерної техніки, оскільки запропоноване вираження багатовидів у вигляді дробово-раціональних функцій виявляє переваги їх моделей особливо зручними для програмування.

Методика конструювання раціональних багатовидів, поданих у вигляді відповідних нелінійних проективних *n*-просторів у внутрішній системі координат, є універсальною і дозволяє скоротити час, підвищити ефективність і знизити затрати на розроблення відповідних геометричних моделей для унаочнення процесів, сприяє підвищенню якості та продуктивності праці на усіх етапах підготовки виробництва, виготовлення продукції, управління і контролю процесу, що досягається завдяки можливості впливати на кожен змодельований підпростір як окремо, так і у взаємодії з іншими *n*-просторами. Таке

моделювання може бути застосоване до всіх багатопараметричних технічних систем, які потребують дослідження і мають прямуючі в нескінченність параметри (наприклад, час).

Аналіз останніх досліджень. Встановлено, що у проективному багатовимірному просторі на відміну від афінних просторів гіперплощини розмірності n завжди перетинаються. Результатом перетину є проективний підпростір розмірності $n-1$ [1]. Ці та інші властивості роблять проективні простори зручнішими, ніж афінні, у багатьох областях математичних та геометричних досліджень, зокрема, у алгебраїчній геометрії, теорії еліптичних кривих та ін.

Розробленню методів та засобів створення геометричних моделей проективних багатовимірних просторів та дослідженню їх геометрії присвячені роботи [2-4], які стверджують ефективність їх застосування у практиці при використанні сучасних програмних засобів комп'ютерного графічного моделювання.

Формулювання цілей статті. Розглянути метод геометричного моделювання проективних багатовимірних просторів на прикладі конкретних задач практики.

Основна частина. Дослідження раціональних багатовидів як відповідних неевклідових проективних n-просторів виконується за допомогою їх геометричних складових – координатних підбагатовидів. У внутрішній проективній системі координат вказані підбагатовиди виступають у якості проективних проекцій досліджуваного багатовиду. Розглядаючи координатну проективну систему n-го порядку $u_0 \cdot u_1 \dots u_k$, одержуємо k-багатовид n-го порядку, поданий рівняннями у параметричній формі. Через кожну пару координатних точок відповідної лінійної проективної системи проходить в'язка площин, образами яких у неевклідовому проективному просторі є відповідні координатні підбагатовиди у внутрішній проективній системі координат.

Для наочного представлення методу дослідження k-багатовидів за їх координатними підбагатовидами розглянемо побудову 2-багатовиду 3-го порядку (рис.1) з рівнянням (1), що демонструє відображення відповідної координатної проективної системи.

$$r = \frac{\sum_{i3=0}^{2} u_{i2} \sum_{i2=0}^{2} u_{i2} \sum_{i1=0}^{2} a_{i3i2i1} r_{i3i2i1} u_{i1}}{\sum_{i3=0}^{2} u_{i3} \sum_{i2=0}^{2} u_{i2} \sum_{i1=0}^{2} a_{i3i2i1} u_{i1}}, \qquad (1)$$

де n – порядок багатовиду;

k –розмірність;

u_i – змінні однорідні параметри;

r_i – радіус-вектори каркасних точок;

α_i – коефіцієнти.

Тепер запишемо рівняння дотичної проективної площини у деякій точці досліджуваного нами багатовиду (u_0,u_1,u_2) у вигляді відображення 2-го порядку координатної проективної системи:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} = {} & \frac{\overline{u}_0\,(a_{000}r_{000}u_0^2 + 2a_{001}\,r_{001}\,u_0u_1 + 2a_{002}\,r_{002}\,u_0u_2 +}{\overline{u}_0\,(a_{000}u_0^2 + 2a_{001}u_0u_1 + 2a_{002}u_0u_2 + a_{011}\,u_1^2 +} \\
& \frac{+\ a_{011}\,r_{011}u_1^2 + 2a_{012}\,r_{012}\,u_1u_2 + a_{022}\,r_{022}u_2^2) +}{+\ 2a_{012}\,u_1u_2 + a_{022}\,u_2^2) + \overline{u}_1\,(a_{100}u_0^2 + 2a_{101}u_0u_1 +} \\
& \frac{+\ \overline{u}_1\,(a_{100}r_{100}u_0^2 + 2a_{101}r_{101}u_0u_1 + 2a_{102}\,r_{102}u_0u_2 +}{+\ 2a_{102}\,u_0u_2 + a_{111}u_1^2 + 2a_{112}\,u_1u_2 + a_{122}u_2^2) +} \qquad (2) \\
& \frac{+\ a_{111}r_{111}u_1^2 + 2a_{112}r_{112}u_1u_2 + a_{122}\,r_{122}\,u_2^2\,) +}{+\ \overline{u}_2(a_{200}\,u_0^2 + 2a_{201}u_0u_1 + 2a_{202}\,u_0u_2 + a_{211}u_1^2 +} \\
& \frac{+\ \overline{u}_2\,(a_{200}r_{200}u_0^2 + 2a_{201}r_{201}u_0u_1 + 2a_{202}\,r_{202}u_0u_2 +}{+\ 2a_{212}\,u_1u_2 + a_{222}u_0^2\,)} \\
& \frac{+\ a_{211}\,r_{211}u_1^2 + 2a_{212}r_{212}u_1u_2 + a_{222}\,r_{222}\,u_2^2\,)}{} \;.
\end{aligned}
$$

У внутрішній проективній системі координат $\overline{0}-\overline{1}-\overline{2}$ одержуємо систему рівнянь поверхні 2-го порядку у вигляді пов'язаних векторів u:

$$\lambda\overline{u}_0 = V_0^2;\lambda\overline{u}_1 = V_0V_1;\lambda\overline{u}_2 = V_1^2\,. \qquad (3)$$

Відповідно до властивостей багатовидів проективного n-простору [1] варто розглядати задачі, в яких один або декілька параметрів необмежено змінюються. У такому випадку приходимо до розгляду класу задач щодо моделювання і дослідження процесів багатопараметричних технічних систем. Зазвичай приймається побудована з використанням системи диференціальних рівнянь модель:

$$\alpha_i\left(\frac{dx_i}{dt}, x_i, t\right) = 0,\ i = 0,1,\ldots,n, \qquad (4)$$

де α_i, x_i –постійні та змінні параметри системи,

t – час.

При необмеженій зміні одного параметра в (4), наприклад, параметра t, одержуємо 1-багатовид $(n+1)$ – вимірного простору. Вилученням з системи (4) параметра t переходимо до його проекції у n-вимірному просторі параметрів системи:

$$\alpha_i\left(\frac{dx_i}{dx_k}, x_i, x_k\right) = 0\;. \qquad (5)$$

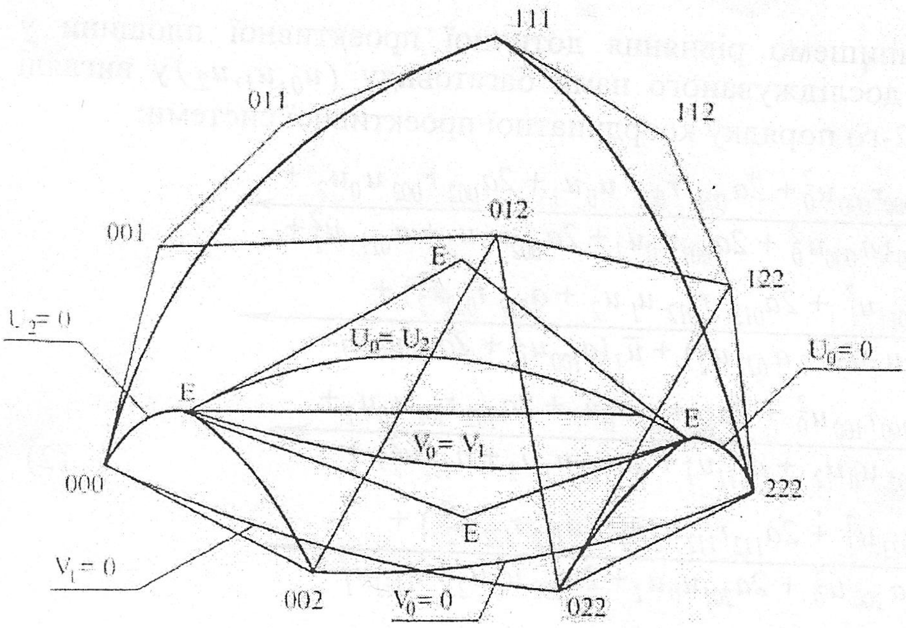
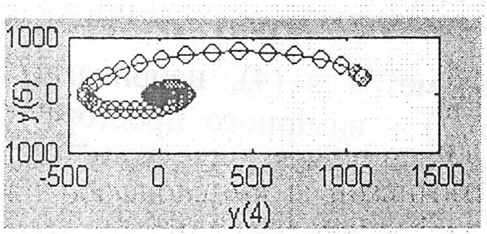


Рис.1. Поверхня тривимірного проективного простору.

Рівняння (5) є основними для побудови траєкторій руху зображуючої точки багатопараметричної технічної системи у просторі параметрів, а також формування фазової гіперповерхні при одночасній зміні усіх визначальних параметрів. Для багатопараметричної технічної системи на прикладі системи регулювання підвісної канатної дороги геометричні моделі траєкторій та фазових гіперповерхонь подають можливість виявляти в системі блоки регулювання із позаштатним перебігом процесу, що визначає негативний вплив на динаміку всієї системи. Фазова гіперповерхня простору параметрів, зокрема, із залученням дотичної гіперплощини згідно з (2) слугує засобом виявлення критичних значень параметрів. Такі екстремуми параметрів можуть мати місце як для складових реакцій в опорах підвісної канатної дороги, так і в елементах її системи керування. Залучення засобів багатовимірної нарисної геометрії дозволяє одержувати проекції багатовидів різної розмірності у площини також різної розмірності, зокрема, одночасно у дво- і тривимірні площини проекцій (рис.2).



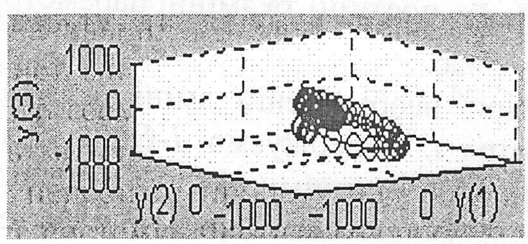


Рис.2. Проекції *1*- багатовиду на дво- і тривимірні площини проекцій.

Відповідно до результатів проведених досліджень і аналізу експериментальних даних розроблений пристрій для регулювання багатопараметричної системи.

Висновки. Запропонований метод застосування багатовимірних проективних просторів використовується при розв'язуванні прикладних задач, зокрема, при дослідженні та моделюванні багатопараметричних технологічних процесів, об'єктів та систем.

Література

1. *Гумен О.М.* До конструювання раціональних багатовидів як неевклідових проективних просторів / *О.М. Гумен* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2005. – Вип. 75. – С. 136-142.
2. *Боднар Г.Й.* Визначення раціональних параметрів багатопараметричних систем / *Г.Й. Боднар, О.Я. Шийко, О.М. Гумен, С.Є. Мартин* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Вип.4. – Т.44. – С.116-122.
3. *Сиденко Л.* Компьютерная графика и геометрическое моделирование/ *Л.Сиденко* - М.: Питер, 2009. – С.27-39.
4. *Гумен О.М.* Комп'ютерна візуалізація 1- багатовидів фазових п-просторів / *О.М. Гумен, С.Є. Мартин* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Вип.4. – Т.39. – С.101-106.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ТЕХНИКИ

Гумен Е.Н., Лясковская С.Е., Боднарь Г.О., Шийко А.Я.

Аннотация – **Материал статьи посвящен обоснованию возможности и практической целесообразности решения прикладных задач техники с привлечением геометрических средств проективных многомерных пространств, в частности, в задачах моделирования процессов многопараметрических систем.**

PROJECTIVE MULTIDIMENSIONAL SPACE APPLICATION FOR SOLVING THE APPLIED TECHNICAL PROBLEMS

O. Gumen, S. Ljaskovska, G. Bodnar, O. Shyjko

Summary

The material of the article is devoted to substantiation of the possibility and practical feasibility of solving the applied engineering problems involving projective geometry means of multidimensional spaces, especially in the problems of modeling the processes of multi parameter systems.