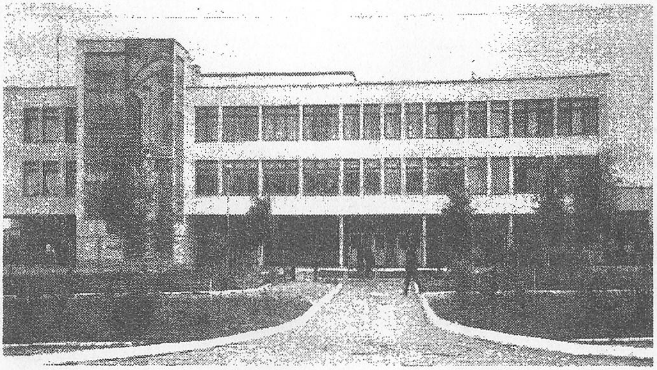
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ
XVI міжвузівської науково-практичної конференції

„МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ"



ЛЬВІВ – 2011

Ідея симетрії "серйозно розширена і вдосконалена, лежить в основі того, як сучасна наука розуміє всесвіт та його походження" [5, с. 12]. Зокрема, у 1963 р. американський фізик-теоретик Ю. Вігнер за відкриття та застосування фундаментальних принципів симетрії для опису взаємодій елементарних часток дістав Нобелівську премію. Можна сказати, що новітні концепції сучасної фізики базуються на понятті симетрії.

Упродовж тривалого часу в науковій методології було прийнято виокремлення "раціональної (наукової) і нераціональної або ірраціональної сфер людського пізнання Це протиставлення призвело до збіднення науки і наукової методології" [1, с. 146]. При цьому ігнорувалося те, що "поняття «наукова картина світу» є метафоричним виразом, що несе в собі значне образно-емоційне навантаження, а тому ….в уявленні про «наукову картину світу» природно й органічно сплавляються два …рівні взаємодії суб'єкта пізнання з пізнаваним світом, яким би ми не уявляли при цьому суб'єкт і пізнаваний світ" [3, с. 179]. Отже, будь-яка чисто раціональна наукова картина світу є неповна, бліда, "холодна" порівняно з реальністю. Тепер ситуація змінюється. Загальновизнаною стає концепція особистісного характеру пізнання, етичного підходу до осягнення сутності світу і буття. При цьому "замість холодної картини світу створюється й аналізується "тепла" картина світу" [1, с. 148].

Отже зрозуміло, що проблема формування картини світу навряд чи може бути розв'язана поза межами емоційно-евристично-інтуїтивної сфери діяльності студента і викладача, поза межами лінійних технологій навчання. Тут треба зважувати кожне слово і пам'ятати, що в процесі спілкування як "розвивальної взаємодії одномоментно може відбутися обмін не лише знаннями, а й нормами, цінностями, виникати взаєморозуміння, розгортатися смислове взаємозбагачення" [2, с. 81]. Тому слід діяти достатньо м'яко, виважено, мудро, не нав'язуючи остаточних варіантів, залишаючи простір для неминучого доповнення, доосмислення, суб'єктивації кінцевої картини кожним із тих, хто навчається і самим викладачем також.

Література

1. Васянович Г.П., Онищенко В.Д. Ноологія особистості. – Львів: Сполом, 2007. – 217 с.

2. Гуменюк О. Освітнє спілкування як інформаційний, діловий, психосмисловий і самосенсовий різновиди обміну // Психологія і суспільство. – 2005. – № 3. – С. 73 – 94.

3. Киященко Л.П., Киященко Н.И. Современная картина мира и синергетика художественных языков // Практична філософія. –2005. – № 1 (15), С. 179 – 195.

4. Сачков Ю.В. Фундаментальные науки как стратегический ресурс развития // Вопросы философии. – 2007. – № 3. – С. 76 – 89.

5. Стюарт Иэн. Истина и красота: Всемирная история симметрии. – М.: Астрель. – 461 с.

Про еквівалентність рівнянь

Карабин О.О., Чмир О. Ю., Меньшикова О.В,. Трусевич О. М.

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Процес розв'язування рівнянь полягає в тому, що дане рівняння перетворюється в друге, це друге – в третє і т.д. доти, поки не утвориться рівняння, розв'язання якого очевидне. При цьому доводиться додавати до обох частин рівняння вирази, що містять або не містять невідоме, множити або ділити обидві частини рівняння на вирази такого самого виду, підносити обидві частини рівняння до степеня, добувати з обох частин рівняння корінь. Виникає запитання: як ці перетворення рівняння впливають на його розв'язки? Чи не втрачаються корені? Чи не виникають сторонні корені?

Два рівняння $\varphi(x) = \psi(x)$ і $\varphi_1(x) = \psi_1(x)$ називаються *еквівалентними*, якщо кожний корінь одного рівняння є також коренем другого рівняння і навпаки.

Поняття еквівалентності рівнянь є відносним. Рівняння можуть бути еквівалентними в одній числовій області, але не бути еквівалентними в іншій.

Якщо кожне з двох рівнянь не має коренів у даній числовій області, то ці рівняння також називаються *еквівалентними в цій області*.

Для алгебраїчних рівнянь часто виникає потреба враховувати також кратність коренів. У цьому випадку два рівняння вважаються еквівалентними, якщо корінь одного з них є коренем тієї самої кратності другого рівняння.

Поряд з поняттям еквівалентності двох рівнянь вживається також поняття еквівалентності одного рівняння і певної сукупності рівнянь. Говорять, що рівняння

$$\varphi(x) = \psi(x) \qquad (1)$$

еквівалентне сукупності рівнянь

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g_1(x), \\ f_2(x) &= g_2(x),, \qquad (2) \\ &\ldots \\ f_n(x) &= g_n(x), \end{aligned}$$

якщо кожний корінь рівняння (1) є коренем принаймні одного з рівнянь сукупності (2), а корінь будь-якого з рівнянь сукупності (2) буде коренем рівняння (1).

Нехай маємо рівняння (1) з областю визначення T та тотожність

$$\sigma(x) = \omega(x) \qquad (3)$$

на множині S (для кожної точки x_0 множини S виконується $\sigma(x_0) = \omega(x_0)$).

Додаючи відповідні частини рівностей (1) та (3), дістанемо

$$\varphi(x) + \sigma(x) = \psi(x) + \omega(x). \qquad (4)$$

Твердження 1. *Якщо співвідношення (3) є тотожністю на множині S і область визначення T рівняння (1) належить S або збігається з S, то рівняння (1) та (4) будуть еквівалентними.*

Твердження і залишається правильним, якщо S – множина дійсних чисел.

Твердження 2. *Нехай ліва частина рівняння*

$$f(x) = 0 \qquad (5)$$

в області його визначення T розкладається на n множників $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, тобто $f(x) = f_1(x)\,f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$. Тоді рівняння (5) рівносильне сукупності рівнянь

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_n(x) = 0.$$

Перемножимо відповідні частини рівностей (1) та (3). Маємо

$$\varphi(x)\ \sigma(x) = \psi(x)\ \omega(x). \qquad (6)$$

Твердження 3. *Якщо область визначення T рівняння (1) належить області S, де має місце (3) та $\sigma(x) \neq 0$, $\omega(x) \neq 0$* для всіх *$x \in S$, то рівняння (1) та (6) еквівалентні.*

Твердження 3 залишається правильним, якщо S – множина дійсних чисел.

Наприклад, рівняння

$$x^4 - 2x^3 = 3x^2 - 4x - 2$$

еквівалентне рівнянню

$$x^4 - 2x^3 - x^2 = 3x^2 - 4x - 2 - x^2,$$

бо його дістаємо додаванням до обидвох частин даного рівняння функції $\sigma(x) = -x^2$, що визначена на множині всіх комплексних чисел. Надаємо другому рівнянню виду

$$(x^2 - 2)(x^2 - 2x - 1) = 0.$$

Це рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь

$$x^2 - 2 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Отже, дане нам рівняння має такі корені:

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = 1 + \sqrt{2},\ x_4 = 1 - \sqrt{2}.$$

Зауваження. *Твердження 1 та 3 виражають достатні умови еквівалентності рівнянь. Якщо ці умови не виконуються, то щось сказати про еквівалентність чи нееквівалентність відповідних рівнянь не можна. Перетворене рівняння може, зокрема, або набути нових коренів або їх втратити. Щоб зробити висновки, в цих випадках потрібно виконувати додаткові дослідження.*

Твердження 4. *Нехай рівняння (1) може бути приведене до еквівалентного йому рівняння виду $F(\omega(x)) = 0$. Якщо коренями рівняння $F(x') = 0$ є числа $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$, то рівняння (1) рівносильне сукупності рівнянь*

$$\left.\begin{array}{l} \omega(x)=x_1' \\ \omega(x)=x_2' \\ \ldots \\ \omega(x)=x_k' \end{array}\right. \qquad (7)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$.

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$(x^2-2x+1)^2-5(x^2-2x+1)+6=0.$$

Поклавши $x'=x^2-2x+1$, дістаємо рівняння $x'^2-5x'+6=0$, що має корені $x_1'=2, x_2'=3$. Отже дане рівняння еквівалентне сукупності рівнянь

$$x^2-2x+1=2,$$

$$x^2-2x+1=3.$$

Із першого дістаємо: $x=1\pm\sqrt{2}$, а з другого $x=1\pm\sqrt{3}$. Тому шуканими коренями будуть числа: $x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}, x_3=1+\sqrt{3}, x_4=1-\sqrt{3}$.

Загальної теорії, за якою можна було б передбачити всі ті перетворення, що приводять до нееквівалентних чи еквівалентних рівнянь, не існує.

Для знаходження коренів рівняння користуються дуже поширеним методом, який засновано на понятті про наслідок рівняння.

Рівняння

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (8)$$

називається *наслідком рівняння* (1), якщо кожний корінь рівняння (1) є також коренем рівняння (8).

Ті корені рівняння (8), які не є коренями рівняння (1), становлять множину сторонніх коренів рівняння (1). Тому розв'язуючи рівняння (8), ми не втрачаємо коренів рівняння (1) і можемо, крім його коренів, дістати також і сторонні корені.

Зрозуміло, що коли друге рівняння є наслідком першого, а третє рівняння є наслідком другого, то третє рівняння буде наслідком першого.

Припустимо, що вдалося дістати наслідок даного рівняння, простіший для розв'язування, ніж дане рівняння. Знайшовши його корені, ми не втратимо коренів вихідного рівняння. Якщо далі послідовно підставляти знайдені числа у дане рівняння, то зможемо виключити його сторонні корені. Саме так і знаходять корені рівняння, коли використовується його наслідок.

Якщо рівняння (8) є наслідком рівняння (1), то записують:

$$\varphi(x)=\psi(x)\Rightarrow f_1(x)=f_2(x).$$

Вимога, щоб два рівняння були еквівалентними, сильніша за умову, щоб одне з рівнянь було наслідком другого рівняння. Проте кожне з двох еквівалентних рівнянь є наслідком іншого, тобто якщо

$$\varphi(x) = \psi(x) \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x),$$

то $\quad \varphi(x) = \psi(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$ та $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x)$.

Зважаючи на цю властивість, твердження, сформульовані раніше для еквівалентних рівнянь, справджуються і тоді, коли одне з рівнянь вважати наслідком іншого. Зокрема,

Твердження 1'. *Якщо область визначення рівняння (1) належить множині S чи збігається с нею і на цій множині має місце тотожність (3), то рівняння (4) буде наслідком рівняння (1).*

Твердження 3'. *Якщо область визначення рівняння (1) належить чи збігається з множиною S, на якій виконується тотожність (3) та* $\sigma(x) \neq 0$, $\omega(x) \neq 0$ для всіх $x \in S$, *то* $\varphi(x) = \psi(x) \Rightarrow \varphi(x)\,\sigma(x) = \psi(x)\,\omega(x)$.

Розглянемо теореми, на яких грунтується перехід від рівняння до його наслідку і які найчастіше використовуються в практиці розв'язування рівнянь.

Твердження 5. *Нехай n – довільне натуральне число. Тоді рівняння*

$$(\varphi(x))^n = (\psi(x))^n$$

буде наслідком рівняння (1).

Твердження 6. *Нехай спільна частина множин значень лівої та правої частин рівняння (1) належить множині S, на якій виконується тотожність (3). Тоді* $\varphi(x) = \psi(x) \Rightarrow \sigma(\varphi(x)) = \omega(\psi(x))$.

Приклади.

1. Розв'язати рівняння: $\arcsin 2x - \arcsin x = \dfrac{\pi}{3}$.

Знаходячи косинуси обох його частин, дістанемо рівняння:

$$\cos(\arcsin 2x - \arcsin x) = \cos\frac{\pi}{3},$$

або $$\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} + 2x^2 = \frac{1}{2}, \tag{9}$$

що є наслідком даного рівняння.

Рівняння $(1-4x^2)(1-x^2) = \dfrac{1}{4} - 2x^2 + 4x^4$ буде наслідком рівняння (9).

Отже, рівняння

$$1 - 5x^2 = \frac{1}{4} - 2x^2 \text{ або } 4x^2 - 1 = 0$$

є наслідком даного рівняння. Шукані корені містяться серед чисел $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$. Число $-\frac{1}{2}$ є стороннім коренем.

2. Розв'язати рівняння: $arctg(x+2) = arctg(x+1) + \frac{\pi}{4}$. Ліва частина рівняння змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а права частина – від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$. Якщо $x = 0$, то $arctg(x+1) = \frac{\pi}{4}$, і права частина дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Вилучивши з області визначення рівняння точку $x = 0$, переконаємось, що значення лівої та правої частини будуть відмінні від $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k – ціле число). Тому рівняння

$$tg(arctg(x+2)) = tg(arctg(x+1) + \frac{\pi}{4})$$

Буде наслідком даного рівняння, якщо $x \neq 0$. Його ми зводимо до вигляду

$$x + 2 = \frac{x+2}{-x}, \text{ або } (x+2)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Це рівняння еквівалентне сукупності рівнянь

$$\begin{matrix} x+2=0 \\ 1+\frac{1}{x}=0 \end{matrix}.$$

Звідси $x_1 = -2, x_2 = -1$. Обидва числа є коренями даного нам рівняння.

2. Розв'язати рівняння: $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}$.

Права частина рівняння є додатною, тому на основі твердження 4 дане рівняння еквівалентне рівнянню

$$\frac{\lg x+7}{x}\lg x = \lg x + 1, \text{ або } (\lg x)^2 + 3\lg x - 4 = 0.$$

Покладемо $x' = \lg x$. Тоді $x'^2 + 3x' - 4 = 0$ і $x'_1 = 1, x'_2 = -4$. Отже, дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\lg x = 1, \lg x = -4$. Тому $x_1 = 10, x_2 = 0{,}0001$ будуть шуканими коренями.