

УДК 517.927.6

Р. М. ТАЦИЙ<sup>1</sup>, В. В. МАЗУРЕНКО<sup>2</sup>

**УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ**

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

<sup>1</sup>Политехника Люблинская, Люблин, Польша,

<sup>2</sup>Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаныка,  
Ивано-Франковск, Украина

Поступило 15.12.2010

В сообщении рассматривается обобщенная дифференциальная система

$$\bar{Y}' = C'(x)\bar{Y} + \bar{F}'(x), \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

где  $\bar{Y}(x)$  –  $n$ -мерная вектор-функция, элементы  $(n \times n)$ -матрицы  $C(x)$  и компоненты  $n$ -мерного вектора  $\bar{F}(x)$  суть непрерывные справа функции ограниченной на  $[a, b]$  вариации ( $C, \bar{F} \in BV^+[a, b]$ ), так что дифференцирование и равенство в (1) понимаются в обобщенном смысле. В дальнейшем предполагаем выполнение условий корректности [1]

$$[\Delta C(x)] = 0, \quad \Delta C(x)\Delta\bar{F}(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \tag{2}$$

позволяющих гарантировать, что при исследовании системы (1) не будет возникать проблема умножения распределений (Шварца). Интерес к системам вида (1) в значительной степени объясняется тем, что в их рамках представляется возможным с единой точки зрения исследовать как линейные обыкновенные дифференциальные системы, так и линейные импульсные и разностные системы.

Пусть  $(m \times n)$ -матрица  $\Omega \in BV^+[a, b]$  и удовлетворяет условиям

$$\Delta\Omega(x)\Delta C(x) = 0, \quad \Delta\Omega(x)\Delta\bar{F}(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{3}$$

Рассмотрим интегральный оператор  $L : BV^+[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n$  вида

$$L\bar{Y} = \int_a^b d\Omega(x)\bar{Y}(x).$$

Оператор  $L$  заведомо определен на решениях системы (1), поскольку в силу условий (2), (3) соответственно  $\bar{Y}(x) \in BV^+[a, b]$  и интеграл в (4) является классическим интегралом Римана–Стилтьеса. В настоящей заметке получены условия разрешимости граничной задачи

$$\bar{Y}' = C'(x)\bar{Y} + \bar{F}'(x), \quad L\bar{Y} = \bar{Q}, \quad \bar{Q} \in \mathbb{C}^m. \tag{4}$$

Обозначая посредством  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_s = b$  точки разрыва матричной функции  $\Omega(x)$ , оператор  $L$  перепишем в форме

$$L\bar{Y} = \sum_{i=1}^s M_i \bar{Y}(x_i) + \int_{x_1}^{x_s} d\Phi(x)\bar{Y}(x), \tag{5}$$

где  $M_i$  – скачки матрицы  $\Omega(x)$  в точках  $x_i$  (здесь не исключается случай бесконечного  $s$  при условии абсолютной сходимости соответствующего ряда [2]), а  $\Phi(x)$  – непрерывная функция ограниченной на  $[a, b]$  вариации ( $\Phi \in BV^c[a, b]$ ).

Для обыкновенных дифференциальных систем, когда  $C(x)$  и  $\bar{F}(x)$  – абсолютно непрерывные на  $[a, b]$  матричные функции, задача (4) и ее частные случаи в самых разных аспектах исследовались многими авторами (см. [3–6]). Для обобщенных дифференциальных систем достаточно изученными можно считать лишь начальные и краевые задачи, что отображено в [7]. Что же касается задачи (4), то близкие по постановке проблемы изучались в [8], где  $C(x)$  имеет  $m$  непрерывных производных на  $[a, b]$ , а  $\bar{F}(x)$  – распределение на  $[a, b]$  порядка не выше  $m + 1$ , в [9] – для линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, в [10] – с условиями типа Коши–Николетти  $y_i(x_i) = l_i(y_1, \dots, y_n) + c_i$  ( $i = 1, n$ ), где  $y_i(x)$  – координаты вектора  $\bar{Y}(x)$ ,  $x_i \in [a, b]$ ,  $l_i : BV([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  – линейные ограниченные функционалы,  $c_i \in \mathbb{R}$

Общее решение системы (1), как известно [1], имеет вид

$$\bar{Y}(x) = B(x, x_1)\bar{C} + \bar{Y}^*(x), \quad (6)$$

где  $B(x, s)$  – фундаментальная матрица однородной системы;  $\bar{C}$  – произвольный постоянный вектор;  $\bar{Y}^*(x) = \int_{x_1}^x B(x, s)d\bar{F}(s)$ . Положим  $L_B = \sum_{i=1}^s M_i B(x_i, x_1) + \int_{x_1}^s d\Phi(x)B(x, x_1)$ . Очевидно,  $L_B$  – матрица размера  $m \times n$ . Пусть  $L_B^+$  – псевдообратная матрица для  $L_B$  [11, с. 34], т. е.

$$L_B L_B^+ L_B = L_B. \quad (7)$$

Если  $m = n$  и  $\det L_B \neq 0$ , то псевдообратная матрица  $L_B^+ = L_B^{-1}$ .

**Т е о р е м а 1.** *Решение задачи (4) существует тогда и только тогда, когда*

$$(E_m - L_B L_B^+)(\bar{Q} - L\bar{Y}^*) = 0. \quad (8)$$

*Если это условие выполняется, то для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы*

$$L_B^+ L_B = E_n. \quad (9)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для решений  $Y(x)$  системы (1) условие  $L\bar{Y} = \bar{Q}$  в силу (6) и очевидного равенства  $L[B(x, x_1)\bar{C}] = L_B \bar{C}$  можно переписать в виде

$$L_B \bar{C} = \bar{Q} - L\bar{Y}^*, \quad (10)$$

где  $\bar{C}$  – произвольный постоянный вектор. Далее

$$L_B L_B^+ L_B \bar{C} = L_B L_B^+ (\bar{Q} - L\bar{Y}^*). \quad (11)$$

Ввиду (7) и (10) имеем  $\bar{Q} - L\bar{Y}^* = L_B L_B^+ (\bar{Q} - L\bar{Y}^*)$ , откуда и следует условие (8).

Наоборот, пусть выполняется условие (8). Покажем, что вектор-функция

$$\bar{Y}(x) = B(x, x_1)[(E_n - L_B^+ L_B)\bar{C}_0 + L_B^+ (\bar{Q} - L\bar{Y}^*)] + \bar{Y}^*(x) \quad (12)$$

для всякого постоянного  $n$ -мерного вектора  $\bar{C}_0$  является решением задачи (4). Поскольку в выражении (12)  $(E_n - L_B^+ L_B)\bar{C}_0 + L_B^+ (\bar{Q} - L\bar{Y}^*) = \bar{C}$ , то  $\bar{Y}(x)$  имеет вид (6) и, следовательно, удовлетворяет системе (1). Остается показать, что  $\bar{Y}(x)$  удовлетворяет условию  $L\bar{Y} = \bar{Q}$ . Действительно, в силу условий (7) и (8) имеем

$$L\bar{Y} = L_B[(E_n - L_B^+ L_B)\bar{C}_0 + L_B^+ (\bar{Q} - L\bar{Y}^*)] + L\bar{Y}^* = \bar{Q} - L\bar{Y}^* + L\bar{Y}^* = \bar{Q}.$$

Понятно, что решение (12) единственно, если и только если имеет место условие (9).

**С л е д с т в и е.** *Если размерности дифференциальной системы (1) и граничного оператора  $L$  совпадают ( $m = n$ ), то для однозначной разрешимости задачи (4) необходимо и достаточно выполнения условия  $\det L_B \neq 0$ .*

Далее для неоднородного квазидифференциального уравнения (КДУ)

$$L_{pq}[y] \equiv \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} (a_{ij}(x) y^{(p-i)})^{(q-j)} = f(x), \quad (13)$$

рассмотрим постановки задач, вписывающиеся в схему (4). КДУ вида (13) с достаточно гладкими, а также суммируемыми по Лебегу на  $[a, b]$  коэффициентами  $a_{ij}(x)$  и правой частью  $f(x)$  посвящено много работ (см. [12]). Мы же ослабляем требования, предполагая что:

I)  $a_{00}^{-1}(x)$  – ограниченная и измеримая на сегменте  $[a, b]$  функция;

II)  $a_{i0}(x), a_{0j}(x) \in L_2[a, b], i=1, p, j=1, q;$

III)  $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x), b_{ij} \in BV^+[a, b], i=1, p, j=1, q;$

IV)  $f(x) = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{k+1} f_k^{(k+1)}(x)$ , где  $f_k \in BV^+[a, b]$ .

Из этих условий видно, что выполнять операцию  $(q-j)$ -кратного дифференцирования в выражении  $L_{pq}[y]$  нельзя из-за недостаточной гладкости его коэффициентов. Если попытаться все же продифференцировать это выражение в обобщенном смысле, то от решения  $y(x)$  уравнения (13) мы вынуждены будем требовать достаточной степени гладкости для того, чтобы операции умножения в левой части были законными (а не только формальными) с точки зрения теории распределений. Всех этих трудностей можно избежать, встав на путь концепции квазипроизводных [7]. Попутно удастся рационально определить решение уравнения (13). Таким образом, постановки задач для уравнения (13), в отличие от классических [13], есть смысл осуществлять в терминах квазипроизводных:

$$y^{[0]} \stackrel{def}{=} y, \quad y^{[i]} = y^{(i)}, \quad i = \overline{1, p-1}; \quad y^{[p]} = \sum_{i=0}^p a_{i0}(x) y^{(p-i)};$$

$$y^{[p+j]} = -(y^{[p+j-1]})' + \sum_{i=0}^p a_{ij}(x) y^{(p-i)}, \quad j = \overline{1, q-l-1};$$

$$y^{[p+j]} = -(y^{[p+j-1]})' + \sum_{i=0}^p a_{ij}(x) y^{(p-i)} + f'_{q-j}(x), \quad j = \overline{q-l, q}.$$

С их помощью КДУ (13) сводится к дифференциальной системе (1), где

$$\bar{Y} = (y, y^{[1]}, \dots, y^{[p+q-1]})^T, \quad \bar{F}'(x) = (0, 0, \dots, 0, f'_{q-1}(x), f'_{q-2}(x), \dots, f'_0(x))^T,$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{00}^{-1}a_{p0} & -a_{00}^{-1}a_{p-1,0} & \dots & -a_{00}^{-1}a_{10} & -a_{00}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{p1} & \tilde{a}_{p-1,1} & \dots & \tilde{a}_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{p,q-1} & \tilde{a}_{p-1,q-1} & \dots & \tilde{a}_{1,q-1} & a_{0,q-1}a_{00}^{-1} & 0 & \dots & -1 \\ \tilde{a}_{pq} & \tilde{a}_{p-1,q} & \dots & \tilde{a}_{1q} & a_{0q}a_{00}^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(здесь для удобства записи приняты обозначения  $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{0j}a_{00}^{-1}a_{i0}, \forall i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ ). При этом ввиду предположений I)–IV) нетрудно убедиться, что выполняются условия корректности (2).

Под решением КДУ (13) понимаем первую координату  $y(x)$  вектора  $\bar{Y}(x)$  дифференциальной системы (1), удовлетворяющую ему в обобщенном смысле, т. е. когда дифференцирование и равенство понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Требуется найти решения КДУ (13), удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям:

а) начальные условия  $y^{[v]}(x_1) = y_1^v$  ( $v = \overline{0, p+q-1}$ ;  $y_1^v \in \mathbb{R}$ );

б) краевые условия  $\sum_{v=0}^{p+q-1} [\alpha_k^v y^{[v]}(a) + \beta_k^v y^{[v]}(b)] = \gamma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ;  $\alpha_k^v, \beta_k^v, \gamma_k \in \mathbb{R}$ );

в) условия типа Коши–Николетти  $y(x_i) = y_i$  ( $i = \overline{1, p+q}$ ,  $p+q > 2$ ;  $y_i \in \mathbb{R}$ );

г) условия типа Валле–Пуссена

$$y^{[v]}(x_i) = y_i^v \quad (v = \overline{0, k_i-1}, i = \overline{1, s}, \sum_{i=1}^s k_i \geq p+q, s > 2; y_i^v \in \mathbb{R});$$

д) многоточечные условия

$$\sum_{i=1}^s \sum_{v=0}^{p+q-1} \alpha_{ki}^v y^{[v]}(x_i) = \gamma_k \quad (s > 2, k = \overline{1, m}; \alpha_{ki}^v, \gamma_k \in \mathbb{R});$$

е) интегральные условия

$$\sum_{v=0}^{p+q-1} \int_a^b \psi_k^v(x) y^{[v]}(x) dx = \gamma_k \quad (k = \overline{1, m}; \psi_k^v \in L[a, b], \gamma_k \in \mathbb{R});$$

ж) смешанные условия. Комбинация условий (б) или (д) с условиями (е);

з) общие дополнительные условия

$$\sum_{v=0}^{p+q-1} \left( \sum_{i=1}^s \alpha_{ki}^v y^{[v]}(x_i) + \int_a^b y^{[v]}(x) d\varphi_k^v(x) \right) = \gamma_k \quad (k = \overline{1, m}; \alpha_{ki}^v, \gamma_k \in \mathbb{R}, \varphi_k^v \in BV^c[a, b]).$$

Каждую из этих задач получается привести к виду (4), если положить:



(а)  $s=1$ ,  $M_1 = E_{p+q}$ ,  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $\bar{Q} = (y_1^0, y_1^1, \dots, y_1^{p+q-1})^T$ ;

(б)  $s=2$ ,  $M_1 = (\alpha_{ki}^v)_{k=1, m}^{v=0, p+q-1}$ ,  $M_2 = (\beta_k^v)_{k=1, m}^{v=0, p+q-1}$ ,  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $\bar{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T$ ;

(в)  $s=p+q$ ,  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $\bar{Q} = (y_1, y_2, \dots, y_{p+q})^T$ ;

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, M_{p+q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

(г)  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $\bar{Q} = (y_1^0, y_1^1, \dots, y_1^{k_1-1}, y_2^0, y_2^1, \dots, y_2^{k_2-1}, \dots, y_s^0, y_s^1, \dots, y_s^{k_s-1})^T$ ;

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 & \dots \\ E_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}, \dots, M_s = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ E_{k_s} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

(д)  $M_i = (\alpha_{ki}^v)_{k=1, m}^{v=0, p+q-1}$ ,  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $\bar{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T$ ;

(е)  $s=2$ ,  $M_1 = M_2 = 0$ ,  $\bar{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T$ ,  $\Phi(x) = \left( \int_{x_1}^x \psi_k^v(x) dx \right)_{k=1, m}^{v=0, p+q-1}$ ;



(ж)  $M_i = (\alpha_{ki}^v)_{k=1, m}^{v=0, p+q-1}$ ,  $\bar{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T$ ,  $\Phi(x) = (\varphi_k^v(x))_{k=1, m}^{v=0, p+q-1}$ .

## Литература

1. Стасюк М., Тацій Р. // Вісн. НУ «Львів. політехніка». 2006. № 566. С. 33–40.
2. Tamarkin J. // Mathematische Zeitschrift. 1928. Bd. 27, № 1. P. 1–54.
3. Cole R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 111. P. 521–550.
4. Conti R. // Boll. UMI. 1967. Vol. 22, № 3. P. 135–178.

5. K r a l l A. // J. Differ. Equations. 1968. Vol. 4. P. 327–336.
6. S t a l l a r d F. // Oak Ridge Nat. Lab. Dept. ORNL-1876. 1955. P. 1–71.
7. Т а ц і й Р., С т а с ю к М., М а з у р е н к о В. // Фіз.-мат. модел. та інформ. технол. 2009. № 10. С. 7–37.
8. Х а л а н а й А., В е к с л е р Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971.
9. К а г а н д ж у л о в L. // Ukr. Math. J. 1995. Vol. 47, № 6. P. 770–774.
10. А ш о р д и я М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 10. С. 1299–1310.
11. Г а н т м а х е р Ф. Теория матриц. М., 1967.
12. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
13. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

*R. M. TATSIY, V. V. MAZURENKO*

mazvic@ukr.net

**CONDITIONS OF SOLVABILITY OF A MULTI-POINT PROBLEM  
FOR THE GENERALIZED DIFFERENTIAL SYSTEM**

**Summary**

By using the concept of a pseudo-inverse matrix, the conditions of existence and uniqueness for solutions of a multi-point problem for the generalized differential system are obtained. Statements of equivalent to it problems for the quasi-differential equation with distributions as coefficients, including the case when the order of the equation and the number of additional conditions do not coincide, are considered.