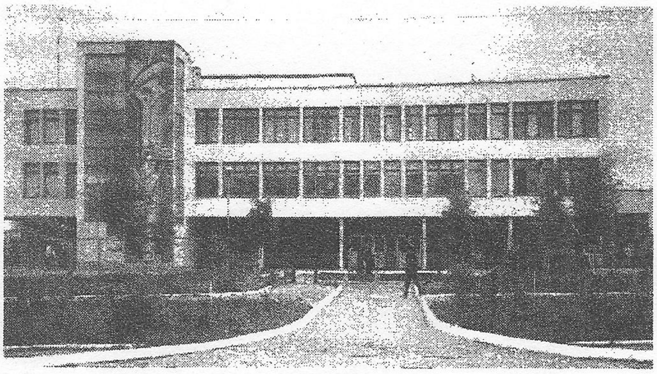
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ
XVI міжвузівської науково-практичної конференції

„МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ"



ЛЬВІВ – 2011

До збірника увійшли матеріали XVI міжвузівської науково-практичної конференції «*Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах*», яка проходила 23 лютого 2011 року у Технічному коледжі Національного університету «Львівська політехніка»

Зміст

Інтегруючи біноміальний розклад $(1+x)^n$ на $[0,1]$, одержимо

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k dx \Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left.\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1, \text{ тому}$$

$$\frac{2^n - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}.$$

З рівності $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m$ випливає $\sum_{r=0}^{n+m} C_{n+m}^r x^r = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$, де

$$C_{n+m}^r = \sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} - \textit{рівність Вандермонда.}$$

Переконуємось, що народження однієї гарної формули (б. Н.) робить доступним одержання множини нових знань.

Література:

1. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. та інші. Математичний аналіз. – Львів.: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2003. – 404 с.
2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.. Мир, 1966. – 320 с.

Про можливість вимірювання температури в недоступних місцях

Тацій Р. М., Стасюк М. Ф.

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

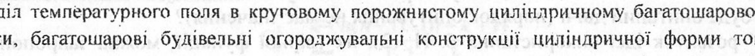
В статті, яка має науково-популярний характер, вкотре підтверджується той факт, що виключно теоретичні міркування нерідко дозволяють робити висновки суто практичного характеру.

Розглядається стаціонарна одновимірна (в напрямку радіальної координати r) задача про розподіл температурного поля в круговому порожнистому циліндричному багатошаровому тілі (трубки, багатошарові будівельні огороджувальні конструкції циліндричної форми тощо). У випадку відсутності внутрішніх джерел тепла така задача [1] зводиться до розв'язування квазідиференціального рівняння

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda \frac{dt}{dr}\right) + \frac{1}{r}\left(\lambda \frac{dt}{dr}\right) = 0, \qquad (1)$$

де $t(r)$ - температура, $t^{[1]}(r) = \lambda(r)\frac{dt}{dr}$ - тепловий потік ($t^{[1]}$ - квазіпохідна, [2]).

Нехай поверхнями $r = r_i$, $i = 0,1,\ldots,n$ тіло поділене на n шарів, взагалі кажучи, різної товщини (див мал.1)



Мал. 1

Припустимо,що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності λ_k при $r_k \le r < r_{k+1}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, тобто $\lambda(r)$ можна подати у вигляді

$$\lambda(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k, \qquad (2).$$

де Θ_k - характеристична функція проміжку $[r_k, r_{k+1})$:

$$\Theta_k = \begin{cases} 1, r \in [r_k, r_{k+1}), \\ 0, r \notin [r_k, r_{k+1}). \end{cases}$$

До рівняння (1) додамо початкові умови

$$t(r_0) = t^0, \quad t^{[1]}(r_0) = t^{[1]0}. \qquad (3)$$

З огляду на зображення (2) робимо висновок $[2]$,що початкова задача $(1),(3)$ має єдиний розв'язок $t(r)$ в класі абсолютно неперервних на $[r_0, r_n)$ функцій разом із своїми квазіпохідними $t^{[1]}(r)$. Це відповідає ідеальному контакту між шарами$[1]$.

Ввівши вектори $\overline{T}(r) = \left(t(r), t^{[1]}(r)\right)^T$, $\overline{T}^0(r) = \left(t^0, t^{[1]0}\right)^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k} \\ 0 & -\dfrac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Зведемо початкову задачу $(1),(3)$ до системи

$$\overline{T}' = A\overline{T} \qquad (4)$$

з початковою умовою

$$\overline{T}(r_0) = \overline{T}^0. \qquad (5)$$

На кожному з проміжків $[r_k, r_{k+1})$ система (4) має вигляд

$$\overline{T}'_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\dfrac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \overline{T}_{(k)}. \qquad (6)$$

Безносередньою перевіркою переконуємось,що матриця Коші $B_k(x,s)$ цієї системи має вигляд

$$B_k(r,s)=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{s}{\lambda_k}\cdot\ln\dfrac{r}{s} \\ 0 & \dfrac{s}{r} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для довільного $k>i$ введемо матриці

$$B(r_k,r_i)=B_{k-1}(r_k,r_{k-1})\cdot B_{k-2}(r_{k-1},r_{k-2})\cdots B_{i+1}(r_{i+1},r_i). \tag{8}$$

На основі зображення (7) методом математичної індукції отримуємо,що

$$B(r_k,r_i)=\begin{pmatrix} 1 & r_i\cdot\sum\limits_{j=i}^{k-1}\dfrac{\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ 0 & \dfrac{r_i}{r_k} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Розв`язок $\overline{T}_k(r)$ задачі (4),(5) на проміжку $[r_k,r_{k+1})$ шукаємо у вигляді

$$\overline{T}_k(r)=B_k(r,r_k)\cdot\overline{P}_k. \tag{10}$$

де $\overline{P}_k$ - поки що невідомий сталий вектор.

Аналогічно для довільного $r\in[r_k,r_{k+1})$ маємо

$$\overline{T}_{k-1}(r)=B_{k-1}(r,r_{k-1})\cdot\overline{P}_{k-1} \tag{11}$$

В точці $r=r_k$ повинна виконуватись умова $\overline{T}_k(r_k)=\overline{T}_{k-1}(r_k)$, що з використанням правих частин (10) і (11) приводять до рекурентного співвідношення

$$\overline{P}_k=B_{r-1}(r_k,r_{k-1})\cdot\overline{P}_{k-1}. \tag{12}$$

Покладаючи в (12) $\overline{P}_0=\overline{T}(r_0)$, отримуємо:

$$\begin{aligned} &\overline{P}_1=B_0(r_1,r_0)\cdot\overline{T}(r_0),\\ &\overline{P}_2=B_1(r_2,r_1)\cdot B_0(r_1,r_0)\cdot\overline{T}(r_0)=B(r_2,r_1)\cdot\overline{T}(r_0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\overline{P}_k=B(r_k,r_0)\cdot\overline{T}(r_0). \end{aligned} \tag{13}$$

Отже, використовуючи (10), маємо

$$\bar{T}_s(r) = B_s(r, r_s)\cdot B(r_s, r_i)\cdot \bar{T}(r_i). \qquad (14)$$

Покладаючи в (7) $s = r_k$, а в (9) $i = 0$ з (14) остаточно отримуємо

$$\bar{T}_k(r) = \begin{pmatrix} 1 & r_0\left(\dfrac{\ln\dfrac{r}{r_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=0}^{k-1}\dfrac{\ln\dfrac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j}\right) \\ 0 & \dfrac{r_0}{r} \end{pmatrix}\cdot \bar{T}(r_0). \qquad (15)$$

Припустимо тепер, що на поверхні $r = r_0$ температура і тепловий потік – невідомі. Натомість ми можемо їх виміряти на зовнішній поверхні $r = r_n$. Так, наприклад, легко виміряти температуру і тепловий потік зовні циліндричної багатошарової труби.

Нехай після вимірювань матимемо

$$t(r_n) = t^n, \quad t^{[1]}(r_n) = -t^{[1]n}.$$

Зауважимо, що знак «-» в останній рівності означає, що температура в точці r_n нижча ніж в точці r_0 [1].

Покладаючи $r = r_n$, з (15) отримуємо

$$\begin{pmatrix} t^0 \\ t^{[1]0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_0\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\ln\dfrac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ 0 & \dfrac{r^0}{r_n} \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} t^n \\ -t^{[1]n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n + r_0 t^{[1]n}\cdot\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\ln\dfrac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ -\dfrac{r_n}{r_0}t^{[1]n} \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} t^0 = t^n + r_0 t^{[1]n}\cdot\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\ln\dfrac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j}, \\ t^{[1]0} = -\dfrac{r_n}{r_0}t^{[1]n}. \end{cases} \qquad (16)$$

Підставивши значення (16) в праву частину формули (15), маємо можливість знайти температуру й тепловий потік в довільній точці кожного шару.

Література

1. В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел Теплопередача.- Москва, Энергия, 1976. – 486 с.

2. О.О. Власій, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій Структура розв`язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". – 2009. - № 660. – С.34-38.