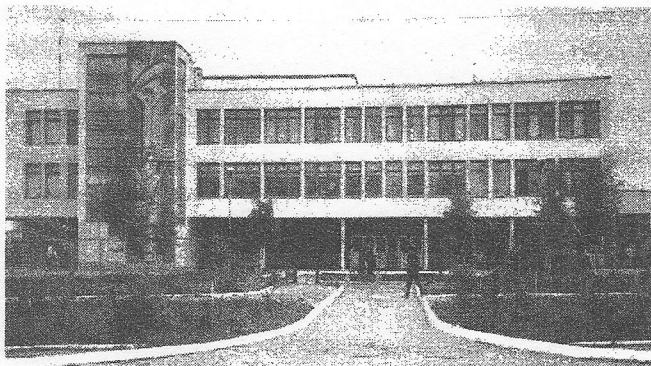


НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА
ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ

**XVI міжвузівської науково-практичної
конференції**

**„МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ
У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ”**



ЛЬВІВ – 2011

До збірника увійшли матеріали XVI міжвузівської науково-практичної конференції «Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах», яка проходила 23 лютого 2011 року у Технічному коледжі Національного університету «Львівська політехніка».

Зміст

1.	<i>Зарічний М.М.</i> , доктор ф.-м.н., проф., декан механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка	2
	Математика у Львівському університеті	
2.	<i>Прутула Я.Г.</i> , канд. ф.-м.н., Львівський національний університет імені Івана Франка	3
	Математика в історії Львівського університету	
3.	<i>Чуйко Г.І.</i> , канд. ф.-м.н., Львівський Національний університет імені Івана Франка	9
	Деякі контрприкладні в аналізі	
4.	<i>Черемних С.В.</i> , доктор ф.-м.н., проф., Національний університет "Львівська політехніка"	11
	Як потрібно писати навчальний посібник?	
5.	<i>Дутка Г.Я.</i> , д.пед.н., проф., кафедри математики і статистики Львівського інституту банківської справи УБС НБУ	13
	Математизація змісту професійної підготовки майбутніх економістів як актуальна проблема сьогодення	
6.	<i>Білий Л.А.</i> , доктор техн.н., проф., <i>Дутка Г.Я.</i> доктор пед.н., проф., <i>Русинко М.К.</i> , канд. ф.-м.н., Львівський інститут банківської справи УБС НБУ	18
	Моделювання економічних процесів статистичними виробничими функціями	
7.	<i>Мохонько А.З.</i> , доктор ф.-м.н., проф., Національний університет "Львівська політехніка", <i>Мохонько В.Д.</i> , канд. ф.-м.н., <i>Васіна Л.С.</i> , канд. пед.н., Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка"	24
	Біном Ньютона	
8.	<i>Тацій Р.М.</i> , доктор ф.-м.н., проф., <i>Стасюк М.Ф.</i> , канд. ф.-м.н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності	27
	Про можливість вимірювання температури в недоступних місцях	
9.	<i>Лециньський О.Л.</i> , канд. ф.-м.н., <i>Тихонова В.В.</i> , ст. викл., Промислово-економічний коледж НАУ, <i>Гроза В.А.</i> , канд. ф.-м.н., <i>Томашук О.П.</i> , канд. пед.н., <i>Бохонько Т.Ю.</i> , ст. викл., Національний авіаційний університет, м. Київ	30
	Пропедевтика теорії оптимізації при викладанні дисципліни "Математика" студентам комп'ютерно-орієнтованих спеціальностей ВНЗ I-II рівнів акредитації	
10.	<i>Антонова Т.М.</i> , канд. ф.-м.н., Національний університет "Львівська політехніка"	37
	Слово про вчителя	
11.	<i>Васильків І.М.</i> , канд. ф.-м.н., Львівська державна фінансова академія	39
	Формування наукової картини світу на заняттях з математики	
12.	<i>Карабин О.О.</i> , канд. ф.-м.н., <i>Чмир О.Ю.</i> , канд. ф.-м.н., <i>Меньшикова О.В.</i> , канд. ф.-м.н., <i>Трусевич О.М.</i> , канд. ф.-м.н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності	41
	Про еквівалентність рівнянь	
13.	<i>Клюйник І.І.</i> , канд. техн.н., <i>Петрович Р.Й.</i> , канд. ф.-м.н., Національний університет "Львівська політехніка"	46
	Агрегативно-ітеративні аналоги градієнтних методів	
14.	<i>Глушик М.М.</i> , канд. ф.-м.н., Львівська комерційна академія	48
	Сучасні інноваційні підходи до вивчення математичних дисциплін у Львівській комерційній академії	

Інтегруючи біноміальний розклад $(1+x)^n$ на $[0, 1]$, одержимо

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k dx \Rightarrow \left. \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \sum_{k=0}^n C_n^k \left. \frac{x^{k+1}}{k+1} \right|_0^1, \text{ тому}$$

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}.$$

З рівності $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m$ випливає $\sum_{r=0}^{n+m} C_{n+m}^r x^r = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \sum_{j=0}^m C_m^j x^j$, де

$$C_{n+m}^r = \sum_{k=0}^r C_n^k C_m^{r-k} - \text{рівність Вандермонда.}$$

Переконуємось, що народження однієї гарної формули (б. Н.) робить доступним одержання множини нових знань.

Література:

1. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. та інші. Математичний аналіз. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2003. – 404 с.
2. Рудин У. Основы математического анализа. – М. Мир, 1966. – 320 с.

Про можливість вимірювання температури в недоступних місцях

Тацій Р. М., Стасюк М. Ф.

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

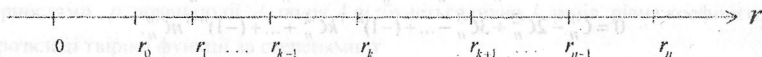
В статті, яка має науково-популярний характер, вкотре підтверджується той факт, що виключно теоретичні міркування нерідко дозволяють робити висновки суто практичного характеру.

Розглядається стаціонарна одновимірна (в напрямку радіальної координати r) задача про розподіл температурного поля в круговому порожнистому циліндричному багат шаровому тілі (трубки, багат шарові будівельні огорожувальні конструкції циліндричної форми тощо). У випадку відсутності внутрішніх джерел тепла така задача [1] зводиться до розв'язування квазідиференціального рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) = 0, \tag{1}$$

де $t(r)$ - температура, $t^{[1]}(r) = \lambda(r) \frac{dt}{dr}$ - тепловий потік ($t^{[1]}$ - квазіпохідна, [2]).

Нехай поверхнями $r = r_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ тіло поділене на n шарів, взагалі кажучи, різної товщини (див мал. 1)



Мал. 1

Припустимо, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності λ_k при $r_k \leq r < r_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, тобто $\lambda(r)$ можна подати у вигляді

$$\lambda(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k, \quad (2)$$

де Θ_k - характеристична функція проміжку $[r_k, r_{k+1})$:

$$\Theta_k = \begin{cases} 1, & r \in [r_k, r_{k+1}), \\ 0, & r \notin [r_k, r_{k+1}). \end{cases}$$

До рівняння (1) додамо початкові умови

$$t(r_0) = t^0, \quad t^{[1]}(r_0) = t^{[1]0}. \quad (3)$$

З огляду на зображення (2) робимо висновок [2], що початкова задача (1), (3) має єдиний розв'язок $t(r)$ в класі абсолютно неперервних на $[r_0, r_n)$ функцій разом із своїми квазіпохідними $t^{[1]}(r)$. Це відповідає ідеальному контакту між шарами [1].

Ввівши вектори $\bar{T}(r) = (t(r), t^{[1]}(r))^T$, $\bar{T}^0(r) = (t^0, t^{[1]0})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix},$$

Зведемо початкову задачу (1), (3) до системи

$$\bar{T}' = A\bar{T} \quad (4)$$

з початковою умовою

$$\bar{T}(r_0) = \bar{T}^0. \quad (5)$$

На кожному з проміжків $[r_k, r_{k+1})$ система (4) має вигляд

$$\bar{T}'_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \bar{T}_{(k)}. \quad (6)$$

Безпосередньо перевіркою переконуємось, що матриця Коші $B_k(x, s)$ цієї системи має вигляд

$$B_k(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{\lambda_k} \cdot \ln \frac{r}{s} \\ 0 & \frac{s}{r} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Для довільного $k > i$ введемо матриці

$$B(r_k, r_i) = B_{k-1}(r_i, r_{k-1}) \cdot B_{k-2}(r_{k-1}, r_{k-2}) \cdots B_{i+1}(r_{i+1}, r_i). \quad (8)$$

На основі зображення (7) методом математичної індукції отримуємо, що

$$B(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & r_i \cdot \sum_{j=i}^{k-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ 0 & \frac{r_i}{r_k} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Розв'язок $\bar{T}_k(r)$ задачі (4), (5) на проміжку $[r_k, r_{k+1})$ шукаємо у вигляді

$$\bar{T}_k(r) = B_i(r, r_k) \cdot \bar{P}_k, \quad (10)$$

де \bar{P}_k - поки що невідомий сталий вектор.

Аналогічно для довільного $r \in [r_i, r_{i+1})$ маємо

$$\bar{T}_{k-1}(r) = B_{k-1}(r, r_{k-1}) \cdot \bar{P}_{k-1}. \quad (11)$$

В точці $r = r_k$ повинна виконуватись умова $\bar{T}_k(r_k) = \bar{T}_{k-1}(r_k)$, що з використанням правил частин (10) і (11) приводить до рекурентного співвідношення

$$\bar{P}_k = B_{k-1}(r_k, r_{k-1}) \cdot \bar{P}_{k-1}. \quad (12)$$

Покладаючи в (12) $\bar{P}_0 = \bar{T}(r_0)$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= B_1(r_1, r_0) \cdot \bar{T}(r_0), \\ \bar{P}_2 &= B_1(r_2, r_1) \cdot B_1(r_1, r_0) \cdot \bar{T}(r_0) = B(r_2, r_1) \cdot \bar{T}(r_0), \\ &\dots \\ \bar{P}_k &= B(r_k, r_0) \cdot \bar{T}(r_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Отже, використовуючи (10), маємо

$$\bar{T}(r) = B_1(r, r_0) \cdot B(r, r_1) \cdot \bar{T}(r). \quad (14)$$

Покладаючи в (7) $s = r_i$, а в (9) $i = 0$ з (14) остаточно отримуємо

$$\bar{T}_i(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \left(\frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\lambda_0} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) \\ 0 & \frac{r_0}{r} \end{pmatrix} \cdot \bar{T}(r_0). \quad (15)$$

Припустимо тепер, що на поверхні $r = r_0$ температура і тепловий потік – невідомі. Натомість ми можемо їх виміряти на зовнішній поверхні $r = r_n$. Так, наприклад, легко виміряти температуру і тепловий потік зовні циліндричної багатопарової труби.

Нехай після вимірювань матимемо

$$t(r_n) = t^n, \quad t^{[1]}(r_n) = -t^{[1]n}.$$

Зауважимо, що знак «-» в останній рівності означає, що температура в точці r_n нижча ніж в точці r_0 [1].

Покладаючи $r = r_n$ з (15) отримуємо

$$\begin{pmatrix} t^n \\ -t^{[1]n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_n \left(\frac{\ln \frac{r_n}{r_0}}{\lambda_0} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) \\ 0 & \frac{r_0}{r_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^0 \\ -t^{[1]0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^0 + t_0^{[1]n} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ -\frac{r_0}{r_n} t^{[1]0} \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} t^0 = t^n + r_0 t^{[1]n} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j}, \\ t^{[1]0} = -\frac{r_n}{r_0} t^{[1]n}. \end{cases} \quad (16)$$

Підставивши значення (16) в праву частину формули (15), маємо можливість знайти температуру й тепловий потік в довільній точці кожного шару.

Література

1. В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел Теплопередача - Москва, Энергия, 1976. - 486 с.

2. О.О. Власій, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". - 2009. - № 660. - С.34-38.

Показують, що $\tilde{T}(x) = B(x)T(x)$ і $\tilde{U}(x) = B(x)U(x)$ є розв'язками системи (1) з кусково-змінними коефіцієнтами.

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}(x) \\ \tilde{U}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x)T(x) \\ B(x)U(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} = \tilde{B}(x) \begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Згідно з теоремою 1, розв'язки системи (1) з кусково-змінними коефіцієнтами можна знайти у вигляді $\tilde{T}(x) = \tilde{B}(x)T(x)$ і $\tilde{U}(x) = \tilde{B}(x)U(x)$, де $T(x)$ і $U(x)$ є розв'язками системи (2) з постійними коефіцієнтами.

$$\begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ U_0 \end{pmatrix} \exp\left(\int_0^x A(s) ds\right) \quad (2)$$

Позначимо $\tilde{T}(x) = B(x)T(x)$ і $\tilde{U}(x) = B(x)U(x)$. Тоді $\tilde{T}(x)$ і $\tilde{U}(x)$ є розв'язками системи (1) з кусково-змінними коефіцієнтами.

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}(x) \\ \tilde{U}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x)T(x) \\ B(x)U(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} = \tilde{B}(x) \begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Позначимо $\tilde{T}(x) = B(x)T(x)$ і $\tilde{U}(x) = B(x)U(x)$. Тоді $\tilde{T}(x)$ і $\tilde{U}(x)$ є розв'язками системи (1) з кусково-змінними коефіцієнтами.

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}(x) \\ \tilde{U}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x)T(x) \\ B(x)U(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} = \tilde{B}(x) \begin{pmatrix} T(x) \\ U(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Позначимо $\tilde{T}(x) = B(x)T(x)$ і $\tilde{U}(x) = B(x)U(x)$. Тоді $\tilde{T}(x)$ і $\tilde{U}(x)$ є розв'язками системи (1) з кусково-змінними коефіцієнтами.