

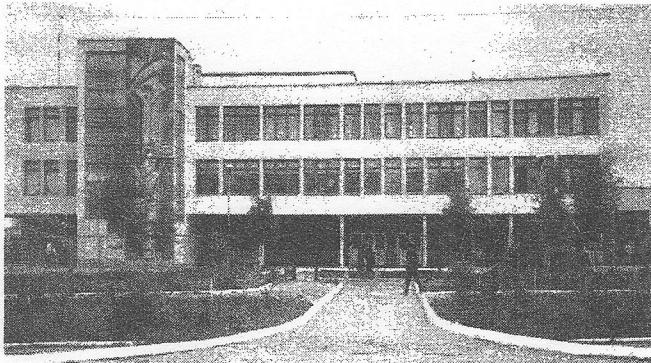
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ

XVI міжвузівської науково-практичної конференції

„МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ
У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ”



ЛЬВІВ – 2011

До збірника увійшли матеріали XVI міжвузівської науково-практичної конференції «Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах», яка проходила 23 лютого 2011 року у Технічному коледжі Національного університету «Львівська політехніка».

Зміст

| | |
|--|----|
| 1. Зарічний М.М., доктор ф.-м.н., проф., декан механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка | 2 |
| Математика у Львівському університеті | |
| 2. Притула Я.Г., канд. ф.-м.н., Львівський національний університет імені Івана Франка | 3 |
| Математика в історії Львівського університету | |
| 3. Чуйко Г.І., канд. ф.-м.н., Львівський Національний університет імені Івана Франка | 9 |
| Деякі контриприклади в аналізі | |
| 4. Черемних Е.В., доктор ф.-м.н., проф., Національний університет “Львівська політехніка” | 11 |
| Як потрібно писати навчальний посібник? | |
| 5. Дутка Г.Я., д. пед. н., проф., кафедри математики і статистики Львівського інституту банківської справи УБС НБУ | 13 |
| Математизація змісту професійної підготовки майбутніх економістів як актуальна проблема сьогодення | |
| 6. Більш Л.А., доктор техн. н., проф., Дутка Г.Я., доктор пед. н., проф., Русинко М.К., канд. ф.-м. н., Львівський інститут банківської справи УБС НБУ | 18 |
| Моделювання економічних процесів статистичними виробничими функціями..... | |
| 7. Мохонько А.З., доктор ф.-м.н., проф., Національний університет “Львівська політехніка”, Мохонько В.Д., канд. ф.-м.н., Bacina L.C., канд. пед. н., Технічний коледж Національного університету “Львівська політехніка” | 24 |
| Біном Ньютона | |
| 8. Тацій Р.М., доктор ф.-м.н., проф., Стасюк М.Ф., канд. ф.-м.н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності | 27 |
| Про можливість вимірювання температури в недоступних місцях | |
| 9. Лещинський О.Л., канд. ф.-м.н., Тихонова В.В., ст. викл., Промислово-економічний коледж НАУ, Гроза В.А., канд. ф.-м.н., Томашук О.П., канд. пед. н., Boehanova T.YU., ст. викл., Національний авіаційний університет, м. Київ | 30 |
| Пропедевтика теорії оптимізації при викладанні дисципліни “Математика” студентам комп’ютерно-орієнтованих спеціальностей ВНЗ І-ІІ рівнів акредитації | |
| 10. Антонова Т.М., канд. ф.-м.н., Національний університет “Львівська політехніка” | 37 |
| Слово про вчителя | |
| 11. Васильків І.М., канд. ф.-м.н., Львівська державна фінансова академія | 39 |
| Формування наукової картини світу на заняттях з математики | |
| 12. Карабін О.О., канд. ф.-м.н., Чмир О.Ю., канд. ф.-м.н., Меньшикова О.В., канд. ф.-м.н., Трусович О.М., канд. ф.-м.н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності | 41 |
| Про еквівалентність рівнянь | |
| 13. Клюнік І.І., канд. техн. н., Петрович Р.Й., канд. ф.-м.н., Національний університет “Львівська політехніка” | 46 |
| Агрегативно-ітеративні аналоги градієнтних методів | |
| 14. Глушкік М.М., канд. ф.-м.н., Львівська комерційна академія | 48 |
| Сучасні інноваційні підходи до вивчення математичних дисциплін у Львівській комерційній академії | |

Інтегруючи біноміальний розклад $(1+x)^n$ на $[0, 1]$, одержимо

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k dx \Rightarrow \left(\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1, \text{ Tomy}$$

зокрема, який не містить нуля (якщо $n = 1$ то $\frac{2^n - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_n^k}{k+1}$), але вони єдині, якщо $n > 1$).

З рівності $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m$ випливає $\sum_{r=0}^{n+m} C_{n+m}^r x^r = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$

$$C_{n+m}^r = \sum_{k=0}^r C_n^k C_m^{r-k} - \text{рівність Вандермонда.}$$

Переконуємось, що народження однієї гарної формули (б. Н.) робить доступним одержання множини нових знань.

Література:

1. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. та інші. Математичний аналіз. – Львів.: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2003. – 404 с.
 2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966. – 320 с.

Про можливість вимірювання температури в недоступних місцях

Таций Р. М., Стасюк М. Ф.

В статті, яка має науково-популярний характер, вкотре підтверджується той факт, що виключно теоретичні міркування нерідко дозволяють робити висновки суто практичного характеру.

Розглядається стаціонарна одновимірна (в напрямку радіальної координати r) задача про розподіл температурного поля в круговому порожнистому циліндричному багатошаровому тілі (трубки, багатошарові будівельні огорожувальні конструкції циліндричної форми тощо). У випадку відсутності внутрішніх джерел тепла така задача [1] зводиться до розв'язування квазидиференціального рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) = 0, \quad (1)$$

де $t(r)$ - температура, $t^{[i]}(r) = \lambda(r) \frac{dt}{dr}$ - тепловий потік ($t^{[i]}$ - квазіпохідна, [2]).

Нехай поверхнями $r = r_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ тіло поділене на n шарів, взагалі кажучи, різної товщини (див мал. 1).



Mail 1

Припустимо, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом тепlopровідності λ_k при $r_k \leq r < r_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, тобто $\lambda(r)$ можна подати у вигляді

$$\lambda(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k, \quad (2).$$

де Θ_k - характеристична функція проміжку $[r_k, r_{k+1})$:

$$\Theta_k = \begin{cases} 1, & r \in [r_k, r_{k+1}), \\ 0, & r \notin [r_k, r_{k+1}). \end{cases}$$

До рівняння (1) додамо початкові умови

$$t(r_0) = t^0, \quad t^{[1]}(r_0) = t^{[1]0}. \quad (3)$$

З огляду на зображення (2) робимо висновок [2], що початкова задача (1), (3) має єдиний розв'язок $t(r)$ в класі абсолютно неперервних на $[r_0, r_n]$ функцій разом із своїми квазіпохідними $t^{[1]}(r)$. Це відповідає ідеальному контакту між шарами [1].

Ввівши вектори $\bar{T}(r) = (t(r), t^{[1]}(r))^T$, $\bar{T}^0(r) = (t^0, t^{[1]0})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix},$$

Зведемо початкову задачу (1), (3) до системи

$$\bar{T}' = A \bar{T}, \quad (4)$$

з початковою умовою

$$\bar{T}(r_0) = \bar{T}^0. \quad (5)$$

На кожному з проміжків $[r_k, r_{k+1})$ система (4) має вигляд

$$\bar{T}'_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \bar{T}_{(k)}, \quad (6)$$

$$(a) \bar{V} \cdot (a, b) \bar{A} = \bar{A}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що матриця Коші $B_i(x, s)$ цієї системи має вигляд

$$B_k(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{\lambda_4} \cdot \ln \frac{r}{s} \\ 0 & \frac{s}{r} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для довільного $k > i$ введемо матрицю

$$B(r_i, r_j) = B_{i+1}(r_i, r_{i+1}) \cdot B_{i+2}(r_{i+1}, r_{i+2}) \cdots B_{j-1}(r_{j-1}, r_j), \quad (8)$$

На основі зображення (7) методом математичної індукції отримуємо, що

$$B(r_k, r_t) = \begin{cases} 1 - r_t \cdot \sum_{i=t}^{k-1} \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\lambda_i} & \text{if } k > t \\ 0 & \text{if } k \leq t \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язок $\bar{T}_k(r)$ задачі (4),(5) на проміжку $[r_k, r_{k+1})$ шукаємо у вигляді

$$\bar{J}_c(r) \equiv B_c(r; E_0) \cdot \bar{P}_c. \quad (10)$$

де \tilde{P} - поки що невідомий статій вектор.

Аналогично для довільного $r \in [r_k, r_{k+1})$ маємо

В точці $r = r_k$ повинна виконуватись умова $\bar{T}_k(r_k) = \bar{T}_{k-1}(r_k)$, що з використанням правих частин (10) і (11) приводить до рекурентного спiвiвiщення

$$\bar{P}_i \equiv P_{i+1}(r_i, r_{i+1}); \bar{P}_{i+1} \quad (12)$$

Покладаючи в (12) $\bar{E}_i \equiv \bar{T}(e_i)$, отримуємо:

$$(13) \quad \begin{aligned} \bar{P}_1 &= B_n(r_1, r_o) \cdot \bar{T}(r_o), \\ \bar{P}_2 &= B_1(r_2, r_1) \cdot B_n(r_1, r_o) \cdot \bar{T}(r_o) = B(r_2, r_1) \cdot \bar{T}(r_o). \end{aligned}$$

$$\bar{P}_i = B(r_i, r_0) \cdot \bar{T}(r_i),$$

Отже, використовуючи (10), маємо

$$\bar{T}(r) = B_1(r, r_+) \cdot B(r_+, r_-) \cdot \bar{T}(r_-). \quad (14)$$

Покладаючи в (7) $s \equiv E$, а в (9), $i = 0, 3$ (14) остаточно отримуємо

Припустимо тепер, що на поверхні $r = r_a$ температура і тепловий потік – невідомі. Натомість ми можемо їх виміряти на зовнішній поверхні $r = r_b$. Так, наприклад, легко виміряти температуру і тепловий потік зовні циліндричної багатошарової труби.

Нехай після вимірювань матимемо:

$$t(r_+)=t^n, \quad t^{[0]}(r_+)=-t^{[0]n}.$$

Зауважимо, що знак « \ll » в останній рівності означає, що температура в точці r_n нижча ніж в точці r . [1]

U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE: 1915 14-151

Покладаючи $r = r_n$, з (15) отримуємо

$$\begin{pmatrix} t^n \\ t^{[n]} \end{pmatrix} = \left(1 - r_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} t^n \\ -t^{[n]} \end{pmatrix} = \left(t^n + r_n t^{[n]} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right),$$

260

Другим інструментом, що сподівався остаточного вирішення цієї проблеми, було використання експоненціальної функції $\ln \frac{P_{t+1}}{P_t}$.

$$\begin{cases} t^0 = t'' + r_0 t^{[1]_0} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{\lambda_j}, \\ t^{[1]_0} = -\frac{r_n}{E_0} t^{[1]_0}. \end{cases} \quad (16)$$

Підставивши значення (16) в праву частину формулі (15), маємо можливість знайти температурний полігон в довільній точці кожної шару.

Himelpamypa

1. В.П. Исаченко, В.А. Осинова, А.С. Сукомел Теплопередача - Москва. Энергия. 1976. - 486 с.

2. О.О. Власій, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-zmінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". – 2009. – № 660. – С.34-38.

Оскільки відомо, що $\{P_i(x)\}_{i=1}^K$ – база $\mathcal{B}(x)$, тоді (17) можна записати як

$$P_{k+1}(x) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^k P_i(x) - \sum_{i=1}^k P_i(x) \right) & k \geq 1 \end{cases} \quad (17)$$

Для отримання виразу (18) використовуємо (17) та $P_{k+1}(x) = \{v\} \mathcal{B}$.

$$P_{k+1}(x) = P_{k+1}(x) \cdot B_{k+1}(x) + B_{k+1}(x) \cdot \{v\} \mathcal{B} = \{v\} \mathcal{B} \quad (18)$$

На основі вираження (17) можемо математично вирішити отриману систему:

на якому v – місце бінокулої функції \mathcal{B} , а $\Delta = \tau$ – інтервал, на якому вона визначена.

Співставленням лівого і правого боків у рівності (18) отримуємо вираз для вектора v :

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= \{v\} \mathcal{B} \\ \{v\} \mathcal{B} &= \{v\} \mathcal{B} \end{aligned}$$

І вже відомо, що вектор \mathcal{B} відповідає співвідношенню $\mathcal{B} = \{v\} \mathcal{B}$.

Розв'язок $\tilde{P}_k(x)$ за (4), (5) на проміжку $[r_k, r_{k+1})$ можемо у вигляді

інтегранто (21) $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ виразити як

$$\tilde{P}_k(x) = \tilde{B}_k(x, \bar{x}) \tilde{B}_{k+1}(\bar{x}, x) \quad (21)$$

де $\tilde{B}_k = \text{последовательность } \left\{ \tilde{B}_k(r_i, r_{i+1}) \right\}_{i=0}^{K-1}$

$$\tilde{B}_k(r_i, r_{i+1}) = \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_{K-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta} \sum_{j=i}^{K-1} v_j - 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_K \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ідея виразу (21) полягає в тому, що $\tilde{P}_k(r_i) = \tilde{B}_k(r_i, r_{i+1}) \tilde{B}_{k+1}(r_{i+1}, r_i) = 0$.

В точці $x=r_k$ виконується $\tilde{P}_k(r_k) = \tilde{P}_{k+1}(r_k)$, що в антисиметричному присліду

з частин (20) та (21) приходить до розуміння, що $\tilde{B}_k(r_k, r_{k+1}) = 0$.

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \tilde{B}_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (22)$$

Прикладом (22) $\tilde{P}_k(r_k) = 0$ є

що відповідно до виразу (21) відповідно до виразу (21) відповідно до виразу (21).

Ідея отриманої ідентичності виконується в зважуванні її структурою

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) \cdot B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (23)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (24)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (25)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (26)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (27)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (28)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (29)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (30)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (31)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (32)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (33)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (34)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (35)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (36)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (37)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (38)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (39)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (40)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (41)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (42)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (43)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (44)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (45)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (46)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (47)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (48)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (49)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (50)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (51)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (52)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (53)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (54)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (55)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (56)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (57)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (58)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (59)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (60)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (61)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (62)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (63)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (64)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (65)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (66)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (67)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (68)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (69)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (70)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (71)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (72)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (73)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (74)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (75)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (76)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (77)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (78)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (79)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (80)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (81)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (82)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (83)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (84)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (85)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (86)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (87)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (88)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (89)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (90)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (91)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (92)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (93)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (94)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (95)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (96)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (97)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (98)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (99)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (100)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (101)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (102)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (103)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (104)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (105)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (106)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (107)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (108)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (109)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (110)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (111)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (112)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (113)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (114)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (115)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (116)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (117)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (118)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (119)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (120)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) = 0 \quad (121)$$

$$\tilde{B}_k = B_{k+1}(r_k, r_{k+1}) \cdot B_{k+1}(r_{k+1}, r_k) =$$