ISSN-0236-0497

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

ТОМ 20 (2011)

ISSN-0236-0497

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

**том 20** **2010**

## СОДЕРЖАНИЕ

 **О. Чмир**

# ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ НОРМАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ БІЛЯ МЕЖІ ОБЛАСТІ

За допомогою принципу Шаудера, досліджено характер поведінки розв'язку узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійної параболічної системи біля межі області

*Ключові слова:* узагальнена крайова задача, квазілінійна параболічна система, узагальнена функція, ваговий функційний простір, неперервний оператор, компактна множина, теорема Шаудера про нерухому точку.
*MSC (2000):* 35N10, 70H06

**Вступ.** Існує багато праць, в яких проводилось дослідження розв'язності, а саме існування та єдиність розв'язку крайових задач для квазілінійних еліптичних і параболічних рівнянь з даними із простору $L^p$, $p \geq 1$ та із простору Соболєва $W_p^m$, $m \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Огляд таких результатів наведено у статті [1]. Основні результати в цьому напрямку отримані Браудером Ф.І. (Browder F.E.), Вішиком М.І., Дубинським Ю.А. та іншими вченими.

Розв'язність крайових задач для параболічних лінійних систем диференціальних рівнянь досліджувалась у працях С.Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена, В.А. Солоннікова та їх учнів (див., наприклад, [2], [3, с. 12], [4]-[7]).

У багатьох працях (див., наприклад, [8]-[13]), досліджується існування розв'язків крайових задач для напівлінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь вигляду $(u_i)_t - \triangle u_i = f(u_1, ..., u_n)$ як локальних ([8]), так і глобальних ([9]), їх властивості.

Існування та зображення розв'язку узагальненої крайової задачі для лінійної параболічної системи диференціальних рівнянь отримано в [14, с. 140], [15].

У даній статті розглядається узагальнена нормальна крайова задача для квазілінійної параболічної системи та досліджено характер поведінки її розв'язку біля межі області, тобто доведено існування розв'язку цієї задачі у спеціальних підпросторах вагового $L^1$-простору.

## 1. Основні позначення, формулювання задачі та допоміжні твердження.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\Omega$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу $C^\infty$, $0 < T < +\infty$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$.

Використовуватимемо позначення: $p$, $b \in \mathbb{N}$, $m \stackrel{\text{def}}{=} bp$, $\alpha$ – мультиіндекс з компонентами $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ – довжина мультиіндексу $\alpha$, $D^\alpha \equiv D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\alpha_n}}$; $||x-y|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$, $P=(x,t)$, $M=(y,\tau)$, $d_b(P,M)=|PM|_b=d_b(x,t;y,\tau)=\sqrt{||x-y||^2+|t-\tau|^{\frac{1}{b}}}$ – параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$; $A(x,t,D_x)=\sum\limits_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x,t)D^\alpha$, $a_\alpha(x,t)$ – квадратні порядку $p$ матриці з нескінченно диференційовними на $\overline{Q}$ елементами; $I_p$ – одинична матриця порядку $p$; $L(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t}) \equiv (I_p\frac{\partial}{\partial t}-A(x,t,D_x))$ – параболічний диференціальний оператор [3, с. 12]; $b_{j\,\alpha}(x,t)$ $(j=\overline{1,m},\ |\alpha|\le r_j)$ – матриці-рядки довжини $p$ з нескінченно диференційовними на $\overline{\Sigma}$ елементами, де $0\le r_m\le\ldots\le r_1\le 2b-1$. Припускаємо, що система крайових диференціальних виразів $B_j(x,t,D_x)=\sum\limits_{|\alpha|\le r_j} b_{j\,\alpha}(x,t)D^\alpha$, $j=\overline{1,m}$ є нормальною на $\Sigma$ ([3, с. 178]) і задовольняє умову Лопатинського ([3, с. 15]).

Надалі вважатимемо, що довільна вектор-функція $F$ належить до функційного простору $[X]^p$, якщо кожна її компонента $F_i$, $i=\overline{1,p}$ належить до $X$.

Якщо всі компоненти матриць-функцій чи вектор-функцій $\Gamma(x,t)$ мають порядок $O(v^\kappa(x,t))$, $\kappa\in\mathbb{R}$, $(x,t)\in\overline{Q}$ при $v(x,t)\to 0$, то писатимемо $\Gamma(x,t)=O(v^\kappa(x,t))$ при $v(x,t)\to 0$.

Згідно з [3, с. 178], [5] існують крайові диференціальні вирази $\widehat{B_j}$, $C_j$, $\widehat{C_j}$ типу $B_j$, $j=\overline{1,m}$ порядків відповідно $\widehat{r_j}$, $m_j$, $\widehat{m_j}$, такі, що $r_j+\widehat{m_j}=m_j+\widehat{r_j}=2b-1$ і правильна формула Ґріна

$$\int\limits_Q [v^\top(Lu)-(L^*v)^\top u]\,dxdt=\sum_{j=1}^m\int\limits_\Sigma[(\widehat{B_j}v)(C_ju)-(\widehat{C_j}v)(B_ju)]\,dSdt+$$

$$+\int\limits_\Omega v^\top(x,t)u(x,t)|_{t=0}^{t=T}\,dx \text{ для довільних } u,v\in[C^\infty(\overline{Q})]^p,$$

де $L^*=-(I_p\frac{\partial}{\partial t}+A^*)$, $A^*$ – формально спряжений диференціальний оператор до диференціального оператора $A$, символ "$\top$" означає транспонування.

Використовуватимемо такі функційні простори:
$D(\overline{Q})=C^\infty(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma})=C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega})=C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{Q})=\{\varphi\in D(\overline{Q}):\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=T}=0,\ k=0,1,\ldots\}$, $D^0(\overline{\Sigma})=\{\varphi\in D(\overline{\Sigma}):\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=T}=0,\ k=0,1,\ldots\}$, $D_0(\overline{\Omega})=\{\varphi\in D(\overline{\Omega}):B_j\varphi\,|_S=0,\ j=\overline{1,m}\}$, $W^l_{1,\,loc}(Q)=\{\mathrm{v}\in L^1_{loc}(Q):\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}}D^\alpha\mathrm{v}\in L^1_{loc}(Q),\ |\alpha|+2b\alpha_0\le l\}$, $l\in\mathbb{N}$.

Позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi,F)_1$ – значення узагальненої вектор-функції $F\in[(D^0(\overline{\Sigma}))']^p$ на основній вектор-функції $\varphi\in[D^0(\overline{\Sigma})]^p$, через $(\varphi,F)_2$ – значення $F\in[(D_0(\overline{\Omega}))']^p$ на $\varphi\in[D_0(\overline{\Omega})]^p$, а під $s(F)$ розумітимемо максимальний із порядків сингулярностей компонент узагальненої вектор-функції $F$ ([16, с. 123]).

Нехай $l \in \mathbb{N}$, $l \leq 2b-1$, а $M(l)$ – кількість мультиіндексів $\alpha$ таких, що $|\alpha| \leq l$. Позначимо через $\partial_l u = (u, u_{x_1}, ..., D^\alpha u, ...)$, $|\alpha| \leq l$ матрицю розмірності $p \times M(l)$, компонентами якої є компоненти вектор-функції $u$ та їх похідні за просторовими змінними до порядку $l$. Під $\mathbb{M}_{p\times M(l)}$ розумітимемо простір матриць розмірності $p \times M(l)$.

Розглянемо узагальнену нормальну крайову задачу для квазілінійної параболічної системи

$$L(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t})u(x,t) = F_0(x,t,\partial_l u(x,t)),\ \ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t)\mid_\Sigma = F_j(x,t),\ \ j=\overline{1,m},\ \ (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = F_{m+1}(x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

де $u$ – шукана вектор-функція (матриця-стовпець висоти $p$), $F_0$, $F_{m+1}$ (матриці-стовпці висоти $p$), $F_j$ $(j=\overline{1,m})$ – задані функції.

Надалі припускатимемо, що

$$\begin{array}{l} 1)\, F_0(x,t,z)\, (z=(z_{(0,...,0)}, z_{(1,0,...,0)}, ..., z_\alpha, ...)) - \text{вектор-функція,} \\ \quad \text{визначена в } Q \times \mathbb{M}_{p\times M(l)},\ \text{зі значеннями в } \mathbb{R}^p, \\ 2)\, F_j \in (D^0(\overline{\Sigma}))',\ 0 \leq s(F_j) \leq q_j,\ 1 \leq j \leq m, \\ 3)\, F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p,\ 0 \leq s(F_{m+1}) \leq q_{m+1}. \end{array} \tag{4}$$

Нехай $\varrho_1(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна в $\Omega$, має порядок відстані $d(x)$ від точки $x$ до $S$ біля $S$ та $\varrho_1(x) \leq 1$, $x \in \overline{\Omega}$;

$\varrho_2(t)$ $(t \in (0,T])$ – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок $t$ при $t \to 0$ і, крім того, $\varrho_2(t) \leq 1$, $t \in (0,T]$;

$\varrho(x,t) = \min\{\varrho_1(x);\ [\varrho_2(t)]^{\frac{1}{2b}}\}$, $(x,t) \in Q$.

Введемо функційні простори:

$[X_k(\overline{Q})]^p = \{\psi \in [D^0(\overline{Q})]^p : \psi(\cdot,0) \in [D_0(\overline{\Omega})]^p,\ \widehat{B_j}\psi\mid_{\overline{\Sigma}} = 0,\ j=\overline{1,m}, L^*\psi(x,t) = = O(\varrho^k(x,t)), \varrho(x,t) \to 0\}$;

$\mathcal{M}^p_{k,l}(Q) = \{\mathrm{v} \in [W^l_{1,loc}(Q)]^p : ||\mathrm{v}||_{k,l} = \sum\limits_{|\gamma|\leq l} \int\limits_Q \varrho^{k+|\gamma|}(x,t)|D^\gamma \mathrm{v}(x,t)|_p\, dxdt < +\infty\}$,

де $k \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{v}|_p = \sum\limits_{j=1}^{p} |\mathrm{v}_j|$.

**Зауваження.** У [14, с. 136-137] доведено, що $[X_k(\overline{Q})]^p$ непорожний при $k \geq 0$.

Припустимо, що

$$k > k_0 \stackrel{def}{=} \max_{1\leq j\leq m+1}\{q_j+2b-r_j-(j)\}+n-1,\ \text{де } (j) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & j=m+1 \\ 1, & 1 \leq j \leq m, \end{array}\right.\ r_{m+1} = 2b.$$

Зауважимо, що $k_0 \geq n-1$ при $q_j \geq 0$, $j=\overline{1,m+1}$.

**Означення 1.** *Розв'язком задачі (1)-(3) називається вектор-функція* $u \in \mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$ *така, що*

$$\int\limits_Q (L^*\psi)^\top u\,dxdt = \int\limits_Q \psi^\top(x,t)F_0(x,t,\partial_l u(x,t))\,dxdt + \sum_{j=1}^m (\widehat{C_j}\psi, F_j(x,t))_1 +$$

$$+(\psi(\cdot,0), F_{m+1}(\cdot))_2 \quad \textit{для довільної } \psi \in [X_k(\overline{Q})]^p.$$

У [3, с. 16, 120], [6], [15], [17] досліджено матрицю Ґріна $G = (G_0, G_1, ..., G_m)$ задачі (1)-(3), де $G_0(x,t;y,\tau)$ – квадратна матриця порядку $p$, визначена в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$, вектор-функції $G_j(x,t;y,\tau)$, $j = \overline{1,m}$ довжини $p$ визначені в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \Sigma$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$ та $G_j(x,t;y,\tau) = [\widehat{C_j}(y,\tau,D_y)G_0(x,t;y,\tau)]^\top$, $j = \overline{1,m}$. З цих результатів випливає, що

1) $G_j(x,t;y,\tau) = 0$ при $t < \tau$, $j = \overline{0,m}$;

2) для будь-яких мультиіндексів $\alpha_0$, $\alpha$ існують додатні сталі $\widehat{C}_{\alpha_0,\alpha}$ такі, що

$$|\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D^\alpha_x G_j(x,t;y,\tau)| \leq \widehat{C}_{\alpha_0,\alpha}[d_b(x,t;y,\tau)]^{-n-2b+r_j+(j)-|\alpha|-2b\alpha_0}, \quad j = \overline{0,m}; \tag{5}$$

3) для довільних $\alpha$, $|\alpha| < 2b$, існують додатні сталі $\widetilde{C}_\alpha$ такі, що

$$\int\limits_Q |D^\alpha_x G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dxdt \leq \widetilde{C}_\alpha \qquad \text{для довільних } (y,\tau) \in \overline{Q}.$$

Подібно до результатів [18, 19] доведено таку властивість матриці $G_0$.

**Лема 1.** *Нехай* $(x,t) \in Q$, $r > -1$, $\alpha$, $\alpha_0$ *– довільні мультиіндекси. Тоді*

$$\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D^\alpha_x \int\limits_Q G_0(x,t;y,\tau)\varrho^r(y,\tau)\,dyd\tau =$$

$$= \begin{cases} O([\varrho_1(x)]^{r+1-n-|\alpha|-2b\alpha_0} + 1) & \textit{при } d(x) \to 0, \\ O([\varrho_2(t)]^{\frac{r+2b-n-|\alpha|-2b\alpha_0}{2b}} + 1) & \textit{при } t \to 0, \\ O(1) & \textit{всередині області } Q. \end{cases}$$

Введемо позначення: $g_j(x,t) = (G_j(x,t;*,\cdot), F_j(*,\cdot))_1$, $j = \overline{1,m}$,
$g_{m+1}(x,t) = (G_0(x,t;*,0), F_{m+1}(*))_2$, $\quad h(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} g_j(x,t)$,
$(H\mathrm{v})(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t;y,\tau)F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))\,dy$,
$(H_1\mathrm{v})(x,t) = (H\mathrm{v})(x,t) + h(x,t)$.

Використовуючи властивості узагальнених функцій скінченого порядку сингулярності ([16, с. 123-134]) та оцінки похідних матриці Ґріна, як у [20] одержуємо такі леми.

**Лема 2.** *Нехай* $F_1, ..., F_m \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, $0 \leq s(F_j) \leq q_j$, $j = \overline{1, m+1}$. *Тоді*
1) $\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D^\alpha g_j(x,t) = O([\varrho(x,t)]^{-(n+q_j+2b-r_j-(j)+|\alpha|+2b\alpha_0)})$ *при* $\varrho(x,t) \to 0$ *для довільних* $\alpha_0$, $\alpha$, $j = \overline{1, m+1}$;
2) $h \in \mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$ *для будь-якого* $k > k_0$ *а саме, існує додатна стала* $C_1$ *така, що* $||h||_{k,\,l} = C_1 < +\infty$.

**Лема 3.** *Нехай* $r \geq 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V)$ *менша за* $\eta$, *і будь-якої точки* $(y, \tau) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$\int\limits_V \varrho^r(x,t) \cdot |D^\gamma_x G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dxdt < \varepsilon, \qquad |\gamma| \leq l.$$

У просторі $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$ розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\mathrm{v} = H\mathrm{v} + h. \tag{6}$$

Як у статті [21] та у [14, с. 28] для еліптичного випадку, з використанням спеціальних властивостей матриці Ґріна ([14, с. 168], [15]) та теореми Фубіні ([22, с. 24]), доводиться, що вектор-функція $u$ є розв'язком задачі (1)-(3) тоді і лише тоді, коли вона є розв'язком системи інтегро-диференціальних рівнянь (6) у просторі $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$.

## 2. Поведінка розв'язку задачі біля межі області.

Знайдемо характер поведінки розв'язку задачі (1)-(3) біля межі області залежно від порядків сингулярностей узагальнених функцій $F_j$, $j = \overline{1, m+1}$ з правою частиною $F_0$, що задовольняє умови

$$|F_0(x,t,z)|_p \leq \sum_{s=0}^{l} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|_p^{\widehat{p}_s} + A,\ (x,t) \in Q,\ z_\gamma \in \mathbb{M}_{p \times M(l)},$$

$$|F_0(x,t,z^1) - F_0(x,t,z^2)|_p \leq B \sum_{s=0}^{l} \sum_{|\gamma|=s} |z^1_\gamma - z^2_\gamma|_p^{\widehat{p}_s},\ (x,t) \in Q,\ z^1_\gamma,\ z^2_\gamma \in \mathbb{M}_{p \times M(l)},$$

$$\widehat{p}_s \in (0,1),\ A_s,\ A,\ B - \text{ невід'ємні сталі},\ s = \overline{0, l}. \tag{7}$$

У роботі [23] при $F_0$ вигляду (7) з $\widehat{p}_s \in (0, \frac{1}{s+n})$, $s = \overline{0, l}$, функціях $F_j$, $j = \overline{1, m+1}$, що задовольняють (4), отримано існування розв'язку задачі (1)-(3) у просторі $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$, де $\max\limits_{1 \leq j \leq m+1} \{q_j + 2b - r_j - (j)\} - 1 + n < k < \min\limits_{\substack{s:\, A_s \neq 0 \\ 0 \leq s \leq l}} \{-s - 1 + \frac{1}{\widehat{p}_s}\}$.

При $\mu_1,\, \mu_2 \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо норму

$$||\mathrm{v};\, \partial Q||_{\mu_1,\mu_2} = \sum_{|\varsigma|\le l} \max\{ \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^1}} [\varrho_1(y)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot |D^{\varsigma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p\, ;$$
$$\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^2}} [\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot |D^{\varsigma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p\, ;\ \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^3}} |D^{\varsigma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p\}$$

де $Q^1 = \{(x,t) \in Q:\ \varrho(x,t) = \varrho_1(x)$ та $d(x) \le \frac{\varepsilon_0}{2}\}, Q^2 = \{(x,t) \in Q:\ \varrho(x,t) = \sqrt[2b]{\varrho_2(t)}$ та $t \le \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, $Q^3 = Q \setminus \overline{\{Q^1 \cup Q^2\}}$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ – таке задане число, що паралельна до $S$ поверхня $S_{\varepsilon_0}$ є класу $C^{\infty}$, і функційний простір

$$\mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\, \partial Q) = \Big\{\mathrm{v} \in [C^l(Q)]^p:\ [\varrho_1(y)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot D^{\varsigma}\mathrm{v}(y,\tau) \in [C(\overline{Q})]^p,$$
$$[\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot D^{\varsigma}\mathrm{v}(y,\tau) \in [C(\overline{Q})]^p, |\varsigma| \le l\ (||\mathrm{v};\, \partial Q||_{\mu_1,\mu_2} < +\infty)\Big\}.$$

Оскільки для $\mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\, \partial Q)$ при $k+\mu_1 > -1$, $k+\mu_2 > -2b$

$$||\mathrm{v}||_{k,\,l} = \sum_{|\gamma|\le l} \int_Q [\varrho(y,\tau)]^{k+|\gamma|} \cdot |D^{\gamma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p\, dyd\tau \le \sum_{|\gamma|\le l} \Big[\int_{Q^1} [\varrho_1(y)]^{k+\mu_1} \times$$
$$\times \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^1}} ([\varrho_1(y)]^{-(\mu_1-|\gamma|)} \cdot |D^{\gamma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p)\, dyd\tau + \int_{Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{k+\mu_2}{2b}} \cdot \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^2}} ([\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu_2-|\gamma|}{2b}} \times$$
$$\times |D^{\gamma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p)\, dyd\tau + \int_{Q^3} \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^3}} (|D^{\gamma}\mathrm{v}(y,\tau)|_p)\, dyd\tau\Big] = \widetilde{C}_1'' \int_{Q^1} [\varrho_1(y)]^{k+\mu_1}\, dyd\tau +$$
$$+ \widetilde{C}_2'' \int_{Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{k+\mu_2}{2b}}\, dyd\tau + \widetilde{C}_3'' \int_{Q^3} dyd\tau \le \widehat{C} \cdot (\widetilde{C}_1'' + \widetilde{C}_2'' + \widetilde{C}_3'') < +\infty,$$

де $\widehat{C}$ – додатна стала , $\widetilde{C}_i'' = \widetilde{C}_i''(\mathrm{v}) < +\infty$, $i = \overline{1,3}$,

то $\mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\, \partial Q) \subset \mathcal{M}^p_{k,\,l}(Q)$ при $k > \max\{-\mu_1 - 1;\, -\mu_2 - 2b\}$.

Нехай $\mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\,\widetilde{C}}(Q,\, \partial Q) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\, \partial Q) : ||\mathrm{v};\, \partial Q||_{\mu_1,\mu_2} \le \widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\, \partial Q)$.

**Лема 4.** *Якщо вектор-функція $F_0$ задовольняє (7) при $\widehat{p}_s \in (0, \frac{1}{s+n})$, $s = \overline{0,l}$ та*

$$\max_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}} \{s - \frac{1}{\widehat{p}_s}\} < \mu_1 \le \min_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}} \{\frac{1-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\},$$
$$\max_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}} \{s - \frac{2b}{\widehat{p}_s}\} < \mu_2 \le \min\{\min_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}} \{\frac{2b-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\}; 0\}, \tag{8}$$

*то існує стала* $\widetilde{K}_0 > 0$ *така, що при всіх* $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ *оператор* $H$ *відображає* $\mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$ *в себе.*

*Доведення.* Знайдемо оцінку $D^\varsigma(H\mathrm{v})$ при $\mathrm{v}\in\mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l}(Q,\,\partial Q)$, $|\varsigma|\le l$. Маємо

$$|D^\varsigma(H\mathrm{v})(x,t)|_p \le \int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |D^\varsigma_x G_0(x,t;y,\tau)|_p\cdot(\sum_{s=0}^{l}A_s\sum_{|\gamma|=s}|D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau)|_p^{\widehat{p}_s}+A)\,dy.$$

Використовуючи лему **??** при $(\mu_1-s)\widehat{p}_s>-1$, $(\mu_2-s)\widehat{p}_s>-2b$, $s=\overline{0,\,l}$, знаходимо

$$|D^\varsigma(H\mathrm{v})(x,t)|_p \le \sum_{s=0}^{l}A_s\widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s}(\widetilde{C}''_1)^{\widehat{p}_s}\Big([\varrho_1(x)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s+1-n-|\varsigma|}+1\Big)+A'\le$$

$$\le[\varrho_1(x)]^{\mu_1-|\varsigma|}\Big[\sum_{s=0}^{l}A_s\widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s}(\widetilde{C}''_1)^{\widehat{p}_s}\Big([\varrho_1(x)]^{\mu_1(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+1-n}+[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\Big)+$$

$$+A'[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\Big],\ (x,t)\in Q^1;$$

$$|D^\varsigma(H\mathrm{v})(x,t)|_p \le \sum_{s=0}^{l}A_s\widetilde{C}'_{\varsigma,\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}(\widetilde{C}''_2)^{\widehat{p}_s}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s+2b-n-|\varsigma|}{2b}}+1\Big)+A'\le$$

$$\le[\varrho_2(t)]^{\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\Big[\sum_{s=0}^{l}A_s\widetilde{C}'_{\varsigma,\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}(\widetilde{C}''_2)^{\widehat{p}_s}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{\mu_2(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+2b-n}{2b}}+[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\Big)+$$

$$+A'[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\Big],\ (x,t)\in Q^2;$$

$$|D^\varsigma(H_1\mathrm{v})(x,t)|_p\le\sum_{s=0}^{l}A_s\widetilde{C}'_{\varsigma,0}(\widetilde{C}''_3)^{\widehat{p}_s}+A',\ (x,t)\in Q^3,$$

де $A'=A\cdot\widetilde{C}_\varsigma$. При виконанні умов (8)

$$\begin{cases}\mu_1>s-\frac{1}{\widehat{p}_s}\\ \mu_1\le-\frac{n-1+s\cdot\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\end{cases}\quad\text{та}\quad\begin{cases}\mu_2>s-\frac{2b}{\widehat{p}_s}\\ \mu_2\le-\frac{n-2b+s\cdot\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s},\end{cases}\quad s=\overline{0,l},$$

знаходимо $||H\mathrm{v};\,\partial Q||_{\mu_1,\mu_2}\le R_1$, $(x,t)\in\overline{Q}$, де $R_1=\sum\limits_{s=0}^{l}A_s\widetilde{C}'_s(\max\limits_{1\le i\le3}\widetilde{C}''_i)^{\widehat{p}_s}+A'$, $\widetilde{C}'_s=\max\limits_{|\varsigma|\le l}\{\widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s},\,\widetilde{C}'_{\varsigma,\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}},\,\widetilde{C}'_{\varsigma,0}\}$.

Зауважимо, що при $\widehat{p}_s \in (0,1)$, $s=\overline{0,l}$ існує стала $\widetilde{K}_0>0$ така, що $R_1 \le \max\limits_{1\le i\le 3} \widetilde{C}_i'' = \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов (8) при $\widehat{p}_s \in (0, \frac{1}{s+n})$, $s=\overline{0,l}$, $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор $H : \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\partial Q) \to \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\partial Q)$. ■

**Лема 5.** *Нехай* $F_j \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, $0 \le s(F_j) \le q_j$, $j=\overline{1,m+1}$ *та* $\mu_1 \le -k_0-1$, $\mu_2 \le -k_0-1$. *Тоді* $h \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\partial Q)$, *а саме, існує додатна стала* $R_2$ *така, що* $||h;\partial Q||_{\mu_1,\mu_2} \le R_2 < +\infty$.

*Доведення.* За властивостями матриці $G_0$ та узагальнених функцій маємо $h \in [C^\infty(Q)]^p$, а отже, $D^{\varsigma}h \in [C(Q)]^p$. За лемою 2

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot D^{\varsigma}h(x,t) = O([\varrho_1(x)]^{-\mu_1+|\varsigma|-(n+q_j+2b-r_j-(j)+|\varsigma|)})$$

при $d(x)\to 0$,

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot D^{\varsigma}h(x,t) = O([\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|+n+q_j+2b-r_j-(j)+|\varsigma|}{2b}})$$

при $t\to 0$, а отже,

$$[\varrho_1(y)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot D^{\varsigma}h \in [C(\overline{Q})]^p,\ [\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot D^{\varsigma}h \in [C(\overline{Q})]^p$$

при $-\mu_1+|\varsigma|-(n+q_j+2b-r_j-(j)+|\varsigma|) \ge 0$, $-\frac{\mu_2-|\varsigma|+n+q_j+2b-r_j-(j)+|\varsigma|}{2b} \ge 0$, тобто $\mu_1 \le -k_0-1$ та $\mu_2 \le -k_0-1$.

Знайдемо оцінки $|D^{\varsigma}h|_p$, $|\varsigma|\le l$. Використовуючи лему 2, знаходимо

$$|D^{\varsigma}h(x,t)|_p \le \widetilde{C}_1 \sum_{j=1}^{m+1} [\varrho_1(x)]^{-(n+q_j+2b-r_j-(j)+|\varsigma|)} =$$

$$= \widetilde{C}_1 [\varrho_1(x)]^{\mu_1-|\varsigma|} \sum_{j=1}^{m+1} [\varrho_1(x)]^{-(n+q_j+2b-r_j-(j)+\mu_1)}, \quad (x,t)\in Q^1;$$

$$|D^{\varsigma}h(x,t)|_p \le \widetilde{C}_2 \sum_{j=1}^{m+1} [\varrho_2(t)]^{-\frac{n+q_j+2b-r_j-(j)+|\varsigma|}{2b}} =$$

$$= \widetilde{C}_2 [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \sum_{j=1}^{m+1} [\varrho_2(t)]^{-\frac{n+q_j+2b-r_j-(j)+\mu_2}{2b}}, \quad (x,t)\in Q^2;$$

$$|D^{\varsigma}h(x,t)|_p \le \widetilde{C}_3,\ (x,t)\in Q^3,$$

де $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$ – додатні сталі.

При виконанні умови $\mu_1 \le \min\limits_{1\le j\le m+1}\{-(n+q_j+2b-r_j-(j))\} = -k_0-1$ та $\mu_2 \le -k_0-1$, одержуємо $||h;\partial Q||_{\mu_1,\mu_2} \le \max\limits_{1\le i\le 3} \widetilde{C_i} = R_2$. ■

**Лема 6.** *Нехай* $\widehat{p}_s \in (0, \frac{1}{s+n})$, $s = \overline{0,l}$, $\max\limits_{\substack{s:\, A_s \neq 0 \\ 0 \le s \le l}} \{s - \frac{1}{\widehat{p}_s}\} < \mu_1 < \min\limits_{\substack{s:\, A_s \neq 0 \\ 0 \le s \le l}} \{\frac{1-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\}$, $\max\limits_{\substack{s:\, A_s \neq 0 \\ 0 \le s \le l}} \{s - \frac{2b}{\widehat{p}_s}\} < \mu_2 < \min\{\min\limits_{\substack{s:\, A_s \neq 0 \\ 0 \le s \le l}} \{\frac{2b-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\}, 0\}$, $\mu_1\widehat{p}_s - \mu_2 > s\widehat{p}_s + n - 1$, $\mu_2\widehat{p}_s - \mu_1 > s\widehat{p}_s + n - 2b$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V) < \eta$, *для довільних* $(x,t) \in Q^1 \cup Q^2$ *та* $|\varsigma| \le l$, *виконується*

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1 - |\varsigma|)} \cdot \int\limits_{V \cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dy d\tau < \varepsilon, \tag{9}$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2 - |\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{V \cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dy d\tau < \varepsilon, \tag{10}$$

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1 - |\varsigma|)} \cdot \int\limits_{V \cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{(\mu_2 - s)\widehat{p}_s}{2b}} \cdot |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dy d\tau < \varepsilon \tag{11}$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2 - |\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{V \cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{(\mu_2 - s)\widehat{p}_s}{2b}} \cdot |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dy d\tau < \varepsilon \tag{12}$$

*та для довільних* $(x,t) \in \overline{Q}$ *та* $|\varsigma| \le l$, *виконується*

$$\int\limits_{V \cap Q^3} |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dy d\tau < \varepsilon. \tag{13}$$

*Доведення.* Доведемо виконання (9) та (10). Нехай $V$ – довільна підобласть в $Q$, $(x,t) \in \overline{Q^1}$ – довільна точка, а $\sigma \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$ – яке-небудь число. Враховуючи оцінки (5) похідних матриці $G_0$ та лему 1 при $(\mu_1 - s)\widehat{p}_s > -1$, матимемо

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1 - |\varsigma|)} \cdot \int\limits_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^1 : \varrho_1(y) < \sigma\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dy d\tau \le$$

$$\le \widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} \cdot [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1 - |\varsigma|)} \cdot (1 + [\varrho_1(x)]^{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s + 1 - n - |\varsigma|}) \le$$

$$\le C'_{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} \cdot (\sigma^{-(\mu_1 - |\varsigma|)} + \sigma^{\mu_1(\widehat{p}_s - 1) - s\widehat{p}_s + 1 - n}) \le 2C'_{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} \cdot \sigma^{\mu_1(\widehat{p}_s - 1) - s\widehat{p}_s + 1 - n}, \tag{14}$$

де $C'_{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} = \max\limits_{|\varsigma| \le l} \widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1 - s)\widehat{p}_s}$. Зауважимо, що $\mu_1(\widehat{p}_s - 1) - s\widehat{p}_s + 1 - n > 0$, $s = \overline{0,l}$.

Нехай $\varepsilon \in (0,1)$ – довільно вибране. Зафіксуємо його. З (14) випливає, що при

$\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon) = \min\{\left(\frac{\varepsilon}{4C'_{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}}\right)^{\frac{1}{\mu_1(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, для всіх $\varsigma$, $|\varsigma| \le l$

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}|D_x^{\varsigma}G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Враховуючи оцінки похідних матриці $G_0$ і те, що в області $Q^1$ $\varrho(y,\tau) = \varrho_1(y)$ та $||x-y||^2 + |t-\tau|^{\frac{1}{b}} \ge ||x-y||^2 \ge d^2(y) \ge C'\varrho_1^2(y)$, де $C' > 0$, при довільній підобласті $V$ області $Q$ такій, що $m(V) < \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''} \cdot \sigma_0^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l}$, $\widehat{C}'' = \max\limits_{|\varsigma|\le l}\widehat{C}_{\varsigma}(C')^{-(n+|\varsigma|)}$, для всіх $\varsigma$, $|\varsigma| \le l$ та $(x,t) \in \overline{Q^1}$ матимемо

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\ge\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^{\varsigma}G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau \le$$

$$\le \widehat{C}_{\varsigma} \cdot (C')^{-(n+|\varsigma|)} \cdot [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\ge\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s-n-|\varsigma|}\,dyd\tau \le$$

$$\le \widehat{C}_{\varsigma} \cdot (C')^{-(n+|\varsigma|)} \cdot \frac{m(V)}{\sigma_0^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+|\varsigma|}} \le \frac{\widehat{C}''}{\sigma_0^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l}} \cdot m(V) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а отже, існує

$$\eta_1 = \eta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''} \cdot \sigma_0^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''} \cdot \left(\min\{\left(\frac{\varepsilon}{4C'_{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}}\right)^{\frac{1}{\mu_1(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}\right)^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l}$$

таке, що при $m(V) < \eta_1(\varepsilon)$ та $(x,t) \in \overline{Q^1}$

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in V\cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^{\varsigma}G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau \le$$

$$\le [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}|D_x^{\varsigma}G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau +$$

$$+ [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\ge\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^{\varsigma}G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Нехай $(x,t) \in \overline{Q^2}$ – довільна точка, тобто $[\varrho_2(t)]^{\frac{1}{2b}} < \varrho_1(x)$, $\sigma \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$. Враховуючи оцінки (5) похідних матриці $G_0$ та лему 1 при $(\mu_1 - s)\widehat{p}_s > -1$, матимемо

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau \leq$$

$$\leq \widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot [\varrho_1(x)]^{-(\mu_2-|\varsigma|)} \cdot (1 + [\varrho_1(x)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s+1-n-|\varsigma|}) \leq$$

$$\leq C'_{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot (\sigma^{-(\mu_2-|\varsigma|)} + \sigma^{\mu_1\widehat{p}_s-\mu_2-s\widehat{p}_s+1-n}) \leq 2C'_{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot \sigma^{\mu_1\widehat{p}_s-\mu_2-s\widehat{p}_s+1-n}.$$

Зауважимо, що $\mu_1\widehat{p}_s - \mu_2 - s\widehat{p}_s + 1 - n > 0$, $s = \overline{0,l}$.

Звідси випливає, що при $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) = \min\{\Big(\frac{\varepsilon}{4C'_{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}}\Big)^{\frac{1}{\mu_1\widehat{p}_s-\mu_2-s\widehat{p}_s+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, для всіх $\varsigma$, $|\varsigma| \leq l$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma_1\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Враховуючи оцінки похідних матриці $G_0$ і те, що в області $Q^1$ $\varrho(y,\tau) = \varrho_1(y)$ та $||x-y||^2 + |t-\tau|^{\frac{1}{b}} \geq C'\varrho_1^2(y)$, при довільній підобласті $V$ області $Q$ такій, що $m(V) < \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''} \cdot \sigma_1^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l}$, для всіх $\varsigma$, $|\varsigma| \leq l$ та $(x,t) \in \overline{Q^2}$ матимемо

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\geq\sigma_1\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau \leq$$

$$\leq \widehat{C}_\varsigma \cdot (C')^{-(n+|\varsigma|)} \cdot [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\geq\sigma_1\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s-n-|\varsigma|} \, dyd\tau \leq$$

$$\leq \widehat{C}_\varsigma \cdot (C')^{-(n+|\varsigma|)} \cdot \frac{m(V)}{\sigma_1^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+|\varsigma|}} \leq \frac{\widehat{C}''}{\sigma_1^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l}} \cdot m(V) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а отже, існує

$$\eta_2 = \eta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''} \cdot \sigma_1^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''} \cdot \Big(\min\{\Big(\frac{\varepsilon}{4C'_{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}}\Big)^{\frac{1}{\mu_1\widehat{p}_s-\mu_2-s\widehat{p}_s+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}\Big)^{(s-\mu_1)\widehat{p}_s+n+l}$$

таке, що при $m(V) < \eta_2(\varepsilon)$ та $(x,t) \in \overline{Q^2}$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in V\cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau \leq$$

$$\leq [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma_1\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} |D_x^{\varsigma} G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau +$$

$$+[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\geq\sigma_1\}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} \cdot |D_x^{\varsigma} G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Проводячи подібні міркування, матимемо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$$\eta_3 = \eta_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}'''} \Big(\min\{\Big(\frac{\varepsilon}{4C'_{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}}\Big)^{\frac{1}{\min\{-\frac{\mu_1-|\varsigma|}{2b};\, \frac{\mu_2\widehat{p}_s-\mu_1-s\widehat{p}_s+2b-n}{2b}\}}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}\Big)^{\frac{(s-\mu_2)\widehat{p}_s+n+l}{2b}}$$

таке, що при $m(V) < \eta_3(\varepsilon)$ та $(x,t) \in \overline{Q^1}$

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in V\cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}} \cdot |D_x^{\varsigma} G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau < \varepsilon$$

при $\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b} > -1$, $\frac{\mu_2\widehat{p}_s-\mu_1-s\widehat{p}_s+2b-n}{2b} > 0$, $s = \overline{0,l}$, а також існує $\eta_4 = \eta_4(\varepsilon) = \min\{\Big(\frac{\varepsilon}{4C'_{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}}\Big)^{\frac{1}{\min\{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b};\, \frac{\mu_2(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+2b-n}{2b}\}}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}^{\frac{(s-\mu_2)\widehat{p}_s+n+l}{2b}}$ таке, що при $m(V) < \eta_4(\varepsilon)$ та $(x,t) \in \overline{Q^2}$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} \cdot \int\limits_{(y,\tau)\in V\cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}} \cdot |D_x^{\varsigma} G_0(x,t;y,\tau)|_p \, dyd\tau < \varepsilon$$

при $\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b} > -1$, $\frac{\mu_2(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+2b-n}{2b} > 0$, $s = \overline{0,l}$.

За властивостями матриці Ґріна та рівномірної збіжності інтегралів за заданим $\varepsilon > 0$ можна вказати $\eta_5 = \eta_5(\varepsilon) > 0$ ($\eta_5$ не залежить від точки $(x,t) \in \overline{Q}$) таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$, міра якої $m(V) < \eta_5$, для довільних $|\varsigma| \leq l$ виконується (13). При $\eta < \min\{\eta_1;\eta_2;\eta_3;\eta_4;\eta_5\}$ виконуються всі оцінки (9)-(13). ■

**Теорема 1.** *Нехай виконуються припущення (4), вектор-функція $F_0$ задовольняє (7) при $\widehat{p}_s \in (0; \frac{1}{s+n})$, $s = \overline{0,l}$, $\max\limits_{1\leq j\leq m+1}\{q_j - r_j - (j)\} < \min\limits_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\leq s\leq l}}\{\frac{1}{\widehat{p}_s} - s\} - n - 2b$,*

$$\max\{\max_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\leq s\leq l}}\{s - \frac{1}{\widehat{p}_s}\}; -k-1\} < \mu_1 \leq -k_0 - 1,$$

$$\max\{\max_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\leq s\leq l}}\{s - \frac{2b}{\widehat{p}_s}\}; -k-2b\} < \mu_2 \leq -k_0 - 1.$$

$$\mu_1\widehat{p}_s - \mu_2 > s\widehat{p}_s + n - 1, \qquad \mu_2\widehat{p}_s - \mu_1 > s\widehat{p}_s + n - 2b,$$

$$2b\mu_1\widehat{p}_s - \mu_2 > 2bs\widehat{p}_s, \qquad s = \overline{0,l}.$$

*Тоді існує розв'язок* $u \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\,\partial Q)$ *задачі (1)-(3), який при* $\mu_1 > -k-1$, $\mu_2 > -k-2b$ *належить до простору* $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$, *де*
$\max\limits_{1\le j\le m+1}\{q_j + 2b - r_j - (j)\} - 1 + n < k < \min\limits_{\substack{s:\,A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}}\{-s-1+\frac{1}{\widehat{p}_s}\}$.

*Доведення.* Використаємо теорему Шаудера. З умов теореми щодо $\mu_1$ та $\mu_2$ випливає виконання умов лем 4, 5 щодо $\mu_1$ та $\mu_2$. З оцінок, одержаних при доведенні лем 4 та 5, випливає існування сталої $\widetilde{K}_0 > 0$ такої, що для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$ та $\widehat{p}_s \in (0,1)$, $s = \overline{0,l}$ матимемо $||H_1\mathrm{v};\,\partial Q||_{\mu_1,\mu_2} \le \sum\limits_{s=0}^{l} A_s\widetilde{C}_s'(\widetilde{C})^{\widehat{p}_s} + A' + R_2 \le \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Звідси та із лем 4, 5 одержуємо, що при $\widehat{p}_s \in (0;\frac{1}{s+n})$, $s = \overline{0,l}$, $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор $H_1 : \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q) \to \mathcal{M}^p_{\mu,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$, а множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)\}$ – рівномірно обмежена.

Покажемо, що множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)\}$ – одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних$(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$

$$||(H_1\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - (H_1\mathrm{v})(x,t);\,\partial Q||_{\mu_1,\mu_2} \le$$

$$\le \sum_{|\varsigma|\le l}\max\{\sup\nolimits_{(x,t)\in\overline{Q^1}}|[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^\varsigma(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0)$$
$$-[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^\varsigma(H\mathrm{v})(x,t)|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}}|[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}D^\varsigma(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}D^\varsigma(H\mathrm{v})(x,t)|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}}|D^\varsigma(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - D^\varsigma(H\mathrm{v})(x,t)|_p\}+$$

$$+\sum_{|\varsigma|\le l}\max\{\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}}|[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^\varsigma h(x+z,t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^\varsigma h(x,t)|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}}|[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}D^\varsigma h(x+z,t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}D^\varsigma h(x,t)|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}}|D^\varsigma h(x+z,t+z_0) - D^\varsigma h(x,t)|_p\} < \varepsilon \qquad (15)$$

Вважаємо

$$[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} = 0,\ \ [\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} = 0,$$

$$[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\cdot D_x^{\varsigma}G_0(x+z,t+z_0;y,\tau)=0,$$
$$[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\cdot D_x^{\varsigma}G_0(x+z,t+z_0;y,\tau)=0,$$
$$[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\cdot D^{\varsigma}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0)=0,$$
$$[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\cdot D^{\varsigma}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0)=0,$$
$$[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\cdot D^{\varsigma}h(x+z,t+z_0)=0,$$
$$[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\cdot D^{\varsigma}h(x+z,t+z_0)=0,\ |\varsigma|\le l,$$

якщо $(x+z,t+z_0)\notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon>0$. З доведення леми 5 випливає, що

$$[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\cdot D^{\,\varsigma}h(x,t)\in[C(\overline{Q})]^p,$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\cdot D^{\,\varsigma}h(x,t)\in[C(\overline{Q})]^p|\varsigma|\le l.$$

Тому існує $\delta^{'}=\delta^{'}(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\delta^{'}$, $|z_0|<\delta^{'}$, $|\varsigma|\le l$ виконується

$$\sum_{|\varsigma|\le l}\max\{\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}}|[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^{\varsigma}h(x+z,t+z_0)-[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^{\varsigma}h(x,t)|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}}|[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}D^{\varsigma}h(x+z,t+z_0)-[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}D^{\varsigma}h(x,t)|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}}|D^{\varsigma}h(x+z,t+z_0)-D^{\varsigma}h(x,t)|_p\}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t)\in\overline{Q^1}$ та довільних $\mathrm{v}\in\mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$

$$\mathcal{I}^{\,1}(x,t;z,z_0)=$$

$$=|[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^{\varsigma}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0)-[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D^{\varsigma}(H\mathrm{v})(x,t)|_p\le$$

$$\le\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega|[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D_x^{\varsigma}G_0(x+z,t+z_0;y,\tau)-$$

$$-[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}D_x^{\varsigma}G_0(x,t;y,\tau)|_p|F_0(y,\tau,\partial_l\mathrm{v}(y,\tau))|_p\,dy+$$

$$+[\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\cdot\int\limits_t^{t+z_0}d\tau\int\limits_\Omega|D_x^{\varsigma}G_0(x+z,t+z_0;y,\tau)|_p\times$$

$$\times|F_0(y,\tau,\partial_l\mathrm{v}(y,\tau))|_p\,dy=\mathcal{I}_1^1(x,t;z,z_0)+\mathcal{I}_2^1(x,t;z,z_0).$$

Нехай $\widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau) \stackrel{def}{=} [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot D_x^{\varsigma} G_0(x,t;y,\tau)$.

Вектор-функція $F_0(x,t,z)$ визначена в $Q \times \mathbb{M}_{p\times M(l)}$ та задовольняє умови (7). Тоді при $(x,t) \in \overline{Q^1}$ матимемо

$$\mathcal{I}_1^1(x,t;z,z_0) \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q^1} |\widehat{g}_{\varsigma,1}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1''[\varrho_1(y)]^{\mu_1-s})^{\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau +$$

$$+ \int\limits_{Q^2} |\widehat{g}_{\varsigma,1}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_2''[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu_2-s}{2b}})^{\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau +$$

$$+ \int\limits_{Q^3} |\widehat{g}_{\varsigma,1}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_3'')^{\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau =$$

$$= \mathcal{I}_{11}^1(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}_{12}^1(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}_{13}^1(x,t;z,z_0).$$

Нехай $\eta_{1,1} > 0$ – досить мале і довільне число, $Q^1_{\eta_{1,1}}$ – підобласть області $Q^1$ така, що $dist(Q^1_{\eta_{1,1}}, \Sigma) \geq \eta_{1,1} > 0$. Розглянемо при $(x,t) \in \overline{Q^1}$

$$\mathcal{I}_{11}^1(x,t;z,z_0) = \int\limits_{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} (|\widehat{g}_{\varsigma,1}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p) \times$$
$$\times \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} \cdot [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau +$$
$$\int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} (|\widehat{g}_{\varsigma,1}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p) \times$$
$$\times \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} \cdot [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau = \mathcal{I}_{111}^1(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}_{112}^1(x,t;z,z_0).$$

Нехай $\delta_0 > 0$ – фіксоване число. За заданим $\delta_0 > 0$ вибираємо число $\eta_{1,1} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}) \leq \delta_0$ та

$$\eta_{1,1} < \min\Big\{\Big(\frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}_\varsigma \cdot \Big(\sum\limits_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} + A\Big)}\Big)^{\frac{1}{\min\limits_{0\leq s\leq l}\{(\mu_1-s)\widehat{p}_s\}-\mu_1}}, \Big(\frac{\varepsilon}{24A}\Big)^{-\frac{1}{\mu_1}}\Big\}.$$

За лемами 3 та 6 існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_{1,1} > 0$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0) \in Q^1$,

$$\int\limits_{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} |\widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{48\widetilde{A}_1}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{48\widetilde{A}_1}, \tag{17}$$

$$\int\limits_{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}|\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x+z,t+z_0;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{48\widetilde{A}_1}, \tag{18}$$

$$\int\limits_{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x+z,t+z_0;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{48\widetilde{A}_1}, \tag{19}$$

де $\widetilde{A}_1=\sum\limits_{s=0}^{l}A_s(\widetilde{C}''_1)^{\widehat{p}_s}+A$. Тоді з (16), (17), (18), (19) при $(x,t)\in\overline{Q^1}$
$\mathcal{I}^1_{111}(x,t;z,z_0)\le\int\limits_{Q^1\setminus Q_{\eta^1_{1,1}}}(|\widehat{g}_{\varsigma,1}(x+z,t+z_0;y,\tau)|_p+|\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x,t;y,\tau)|_p)\times$
$\times\Big(\sum\limits_{s=0}^{l}A_s(\widetilde{C}''_1)^{\widehat{p}_s}\cdot[\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}+A\Big)\,dyd\tau\le\frac{\varepsilon}{24}$, а отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}}\mathcal{I}^1_{111}(x,t;z,z_0)<\frac{\varepsilon}{24}.$$

Нехай $\widehat{g}'_{\varsigma,\,11}(x,t;y,\tau)\stackrel{def}{=}\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x,t;y,\tau)\cdot\Big(\sum\limits_{s=0}^{l}A_s(\widetilde{C}''_1)^{\widehat{p}_s}\cdot[\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}+A\Big)$.

Виберемо $0<\eta_{1,2}<\frac{\eta_{1,1}}{2}$. Для довільної $(x,t)\in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$ та числа $\eta_{1,2}$ визначимо множини $U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)\stackrel{def}{=}\{(y,\tau)\in Q^1_{\eta_{1,1}}:||x-y||\le\eta_{1,2},\,|t-\tau|\le\eta^{2b}_{1,2}\}$.

Обчислимо $m(U^1_{\eta_{1,2}}(x,t))=\int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)}dyd\tau=\int\limits_{||x-y||\le\eta_{1,2}}dy\cdot\int\limits_{|t-\tau|\le\eta^{2b}_{1,2}}d\tau=2\sigma_n\cdot\eta^{n+2b}_{1,2}$, де $\sigma_n$ – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати $\eta_{1,2}<\min\{\frac{\eta_{1,1}}{2};\,(\frac{\delta_0}{2\sigma_n})^{\frac{1}{n+2b}}\}$, то $m(U^1_{\eta_{1,2}}(x,t))<\delta_0$. Тоді з (16), (17), (18), (19) для довільних $(x,t)\in\overline{Q^1}$ та $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0)\in Q^1$

$$\int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}'_{\varsigma,\,11}(x,t;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{72}, \tag{20}$$

$$\int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}'_{\varsigma,\,11}(x+z,t+z_0;y,\tau)|_p\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{72}. \tag{21}$$

Виберемо $\delta_{1,1}<\min\{\delta_0;\,\frac{\eta_{1,2}}{2}\}$. При $(x,t)\in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$, $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||\le\delta_{1,1}(<\frac14\eta_{1,1})$, $|z_0|\le\delta_{1,1}(<\frac14\eta_{1,1})$ маємо $(x+z,t+z_0)\in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}$. При $(x,t)\in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}$, $(y,\tau)\in Q^1_{\eta_{1,1}}\setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)$,

$||x-y|| \geq \eta_{1,2}$, $|t-\tau| \geq \eta_{1,2}^{2b}$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому матриця $\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x,t;y,\tau)$ рівномірно неперервна в $V = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}},\ (y,\tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}} \backslash U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)}\}$. Тоді існує $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,1}]$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,2}$, $|z_0| < \delta_{1,2}$, $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)}$ при $(\mu_1 - s)\widehat{p}_s > -1$, $s = \overline{0,l}$ виконується
$|\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x+z, t+z_0; y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x,t;y,\tau)|_p < \frac{\varepsilon}{72A_1^1}$, де
$A_1^1 = \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \backslash U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} \Big( \sum\limits_{s=0}^{l} A_s (\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} + A \Big)\, dy d\tau$, а тоді

$$\int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \backslash U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x+z, t+z_0; y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x,t;y,\tau)|_p\, dy d\tau <$$

$$< \frac{\varepsilon}{72A_1^1} \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \backslash U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} \Big( \sum_{s=0}^{l} A_s (\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} [\varrho_1(y)]^{(\mu_1 - s)\widehat{p}_s} + A \Big)\, dy d\tau \leq \frac{\varepsilon}{72}. \qquad (22)$$

Отже, при $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$ із (20), (21), (22) випливає існування $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,2}$, $|z_0| < \delta_{1,2}$
$\mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) = \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x+z, t+z_0; y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x,t;y,\tau)|_p\, dy d\tau \leq$
$\leq \int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x,t;y,\tau)|_p\, dy d\tau + \int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x+z, t+z_0; y,\tau)|_p\, dy d\tau +$
$+ \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \backslash U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x+z, t+z_0; y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,\,11}'(x,t;y,\tau)|_p\, dy d\tau < \frac{\varepsilon}{24}$, а отже,

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}} \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24}. \qquad (23)$$

При $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}$, $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| \leq \delta_{1,1}(< \frac{\eta_{1,1}}{4})$, $|z_0| \leq \delta_{1,1}(< \frac{\eta_{1,1}}{4})$ буде $(x+z, t+z_0) \in Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}} \subset Q^1$ або $(x+z, t+z_0) \notin Q^1$. За рівномірною неперервністю матриці $\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x,t;y,\tau)$ на замкненій множині $V_1 = \overline{(Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}})} \times \overline{Q^1_{\eta_{1,1}}}$, враховуючи, що $-(\mu_1 - |\varsigma|) \geq 0$, $[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1 - |\varsigma|)} \leq 1$, одержуємо: існує $\delta_{1,3} = \delta_{1,3}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,1}]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \subset \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}}}$ $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,3}$, $|z_0| < \delta_{1,3}$ виконується $|\widehat{g}_{\varsigma,\,1}(x+z, t+$

$z_0; y,\tau) - \widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p < \frac{\varepsilon}{24A_2^1}$, де

$$A_2^1 = \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} \cdot [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau,$$

звідки

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q^1\setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\in Q^1}} \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{24A_2^1} \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} \cdot [\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau = \frac{\varepsilon}{24}.$$

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}$, $(y,\tau) \in Q^1_{\eta_{1,1}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,1}$, $|z_0| < \delta_{1,1}$, для яких $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$, матимемо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q^1\setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\notin Q^1}} \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q^1\setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\notin Q^1}} \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_{\varsigma,1}(x,t;y,\tau)|_p \Big(\sum_{s=0}^{l} A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} \cdot \eta_{1,1}^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s} + A\Big)\, dyd\tau \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_\varsigma \cdot \Big(\sum_{s=0}^{l} \eta_{1,1}^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s-(\mu_1-|\varsigma|)} \cdot A_s(\widetilde{C}_1'')^{\widehat{p}_s} + A\cdot\eta_{1,1}^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{24},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором числа $\eta_{1,1}$. Зауважимо, що при $\mu_1 \leq \min\limits_{\substack{s:\, A_s\neq 0\\ 0\leq s\leq l}} \{\frac{1-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\}$ також $(\mu_1-s)\widehat{p}_s - (\mu_1-|\varsigma|) > 0$.

Показано, що існує $\widetilde{\delta_1} = \min\{\delta_{1,2};\delta_{1,3}\} > 0$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta_1}$, $|z_0| < \widetilde{\delta_1}$ $\mathcal{I}^1_{11}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$.

Подібно можна показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\widetilde{\delta_2} > 0$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta_2}$, $|z_0| < \widetilde{\delta_2}$ $\mathcal{I}^1_{12}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$, а також існує $\widetilde{\delta_3} > 0$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta_3}$, $|z_0| < \widetilde{\delta_3}$, $\mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$.

Розглянемо

$$\mathcal{I}^1_2(x,t;z,z_0) = [\varrho_1(x+z)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)} \int\limits_t^{t+z_0} d\tau \int\limits_\Omega |D_x^\varsigma G_0(x+z,t+z_0;y,\tau)|_p \times$$

$$\times |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))|_p\, dy.$$

Проводячи подібні міркування та враховуючи, що $m(\Omega\times(t,t+z_0)) = m(\Omega)\cdot|z_0|$, за лемою 6 одержуємо: існує $\widetilde{\delta_4} = \widetilde{\delta_4}(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta_4}$, $|z_0| < \widetilde{\delta_4}$ та довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} \mathcal{I}_2^1(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, існує $\widehat{\delta_1} = \min\{\widetilde{\delta_1};\widetilde{\delta_2};\widetilde{\delta_3};\widetilde{\delta_4}\} > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta_1}$, $|z_0| < \widehat{\delta_1}$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} \mathcal{I}^1(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подібно проводимо оцінки інтегралів при $(x,t) \in \overline{Q^2}$ та $(x,t) \in \overline{Q^3}$ і доводимо існування $\widehat{\delta_2}$, $\widehat{\delta_3} > 0$ таких, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \min\{\widehat{\delta_2};\,\widehat{\delta_3}\}$, $|z_0| < \min\{\widehat{\delta_2};\,\widehat{\delta_3}\}$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}} \mathcal{I}^2(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

та

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}} \mathcal{I}^3(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що при оцінюванні інтеграла $\mathcal{I}^2$, коли $(x,t) \in \overline{Q^2}$, $(y,\tau) \in Q^1$ виникає додаткова умова $(\mu_1 - s)\widehat{p}_s - \frac{\mu_2}{2b} > 0$, $s = \overline{0,l}$, а коли $(x,t) \in \overline{Q^2}$, $(y,\tau) \in Q^2$ – умова $\mu_2 < \min\limits_{\substack{s:\,A_s\neq 0\\ 0\leq s\leq l}}\{-\frac{s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\}$.

Отже, множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)\}$ – одностайно неперервна. Таким чином, оператор $H_1$ є компактним на $\mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$.

Покажемо, що $H_1$ – неперервний оператор на $\mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$.

Знайдемо оцінку $D^\varsigma(H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w})$ при $\mathrm{v}$, $\mathrm{w} \in \mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$, $|\varsigma| \leq l$. Маємо

$$|D^\varsigma(H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w})|_p \leq$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_\Omega |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \cdot B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s} |D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau) - D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p^{\widehat{p}_s}\, dy.$$

Використовуючи лему 1 при $(\mu_1 - s)\widehat{p}_s > -1$, $(\mu_2 - s)\widehat{p}_s > -2b$, $s = \overline{0,\,l}$, знаходимо

$$\int_0^t d\tau \int_\Omega |D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p \cdot B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s} |D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau) - D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p^{\widehat{p}_s}\, dy \leq$$

$$\leq B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega[\varrho_1(y)]^{(\mu_1-|\gamma|)\widehat{p}_s}|D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p\times$$

$$\times(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^1}}[\varrho_1(y)]^{-(\mu_1-|\gamma|)}|D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau)-D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p)^{\widehat{p}_s}\,dy\leq B\sum_{s=0}^{l}||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu_1,\,\mu_2}^{\widehat{p}_s}\times$$

$$\times\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega[\varrho_1(y)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s}|D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dy\leq B\sum_{s=0}^{l}||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu_1,\,\mu_2}^{\widehat{p}_s}\times$$

$$\times\widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s}\Big([\varrho_1(x)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s+1-n-|\varsigma|}+1\Big),\ (x,t)\in Q^1;$$

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega|D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p\cdot B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s}|D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau)-D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p^{\widehat{p}_s}\,dy\leq$$

$$\leq B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega[\varrho_2(\tau)]^{\frac{(\mu_2-|\gamma|)\widehat{p}_s}{2b}}|D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p\times$$

$$\times(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^2}}[\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu_2-|\gamma|}{2b}}|D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau)-D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p)^{\widehat{p}_s}\,dy\leq B\sum_{s=0}^{l}||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu_1,\,\mu_2}^{\widehat{p}_s}\times$$

$$\times\widetilde{C}'_{\varsigma,\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s+2b-n-|\varsigma|}{2b}}+1\Big),\ (x,t)\in Q^2;$$

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega|D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p\cdot B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s}|D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau)-D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p^{\widehat{p}_s}\,dy\leq$$

$$\leq B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega|D_x^\varsigma G_0(x,t;y,\tau)|_p(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^3}}|D^\gamma \mathrm{v}(y,\tau)-D^\gamma \mathrm{w}(y,\tau)|_p)^{\widehat{p}_s}\,dy\leq$$

$$\leq B\widetilde{C}_\varsigma\sum_{s=0}^{l}||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu_1,\,\mu_2}^{\widehat{p}_s},\ (x,t)\in Q^3.$$

При v, w $\in\mathcal{M}^p_{\mu_1,\,\mu_2,\,l,\,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu_1,\,\mu_2}=\sum_{|\varsigma|\leq l}\max\{\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}}[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}|D^\varsigma(H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w})|_p;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}}[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}|D^\varsigma(H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w})|_p;\ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}}|D^\varsigma(H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w})|_p\}\leq$$

$$\leq \sum_{|\varsigma|\leq l} \max\{ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} [\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\times$$

$$\times B\sum_{s=0}^{l} ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \partial Q||^{\widehat{p}_s}_{\mu_1,\,\mu_2} \widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s}\Big([\varrho_1(x)]^{(\mu_1-s)\widehat{p}_s+1-n-|\varsigma|}+1\Big);$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}} [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}} B\sum_{s=0}^{l} ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \partial Q||^{\widehat{p}_s}_{\mu_1,\,\mu_2} \widetilde{C}'_{\varsigma,\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s+2b-n-|\varsigma|}{2b}}+1\Big);$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}} B\widetilde{C}_\varsigma \sum_{s=0}^{l} ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \partial Q||^{\widehat{p}_s}_{\mu_1,\,\mu_2}\} \leq B\sum_{s=0}^{l} ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \partial Q||^{\widehat{p}_s}_{\mu_1,\,\mu_2}$$

$$\sum_{|\varsigma|\leq l} \max\{ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} \widetilde{C}'_{\varsigma,(\mu_1-s)\widehat{p}_s}\Big([\varrho_1(x)]^{\mu_1(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+1-n}+[\varrho_1(x)]^{-(\mu_1-|\varsigma|)}\Big);$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}} \widetilde{C}'_{\varsigma,\frac{(\mu_2-s)\widehat{p}_s}{2b}}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{\mu_2(\widehat{p}_s-1)-s\widehat{p}_s+2b-n}{2b}}+[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu_2-|\varsigma|}{2b}}\Big);\ \widetilde{C}_\varsigma\}.$$

Звідси, враховуючи умови на $\mu_1$, $\mu_2$ випливає, що $H_1$ неперервний оператор в $\mathcal{M}^{p}_{\mu_1,\mu_2,l,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$.

За теоремою Шаудера та за умов лем 4, 5, 6, система інтегро-диференціальних рівнянь (6) має розв'язок $u\in\mathcal{M}^{p}_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\,\partial Q)$.

Запишемо умови на $\mu_1$, $\mu_2$ (окрім умов, які зв'язують ці величини) та умови, що $\mathcal{M}^{p}_{\mu_1,\mu_2,l}(Q,\,\partial Q)\subset\mathcal{M}^{p}_{k,l}(Q)$:

$$\begin{aligned}
&\max\{\max_{\substack{s:\,A_s\neq0\\0\leq s\leq l}}\{s-\tfrac{1}{\widehat{p}_s}\};-k-1\}<\mu_1\leq\min\{\min_{\substack{s:\,A_s\neq0\\0\leq s\leq l}}\{\tfrac{1-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\};\,-k_0-1\},\\
&\max\{\max_{\substack{s:\,A_s\neq0\\0\leq s\leq l}}\{s-\tfrac{2b}{\widehat{p}_s}\};-k-2b\}<\mu_2\leq\\
&\qquad\leq\min\{\min_{\substack{s:\,A_s\neq0\\0\leq s\leq l}}\{\tfrac{2b-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\};\,\min_{\substack{s:\,A_s\neq0\\0\leq s\leq l}}\{-\tfrac{s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}\};\,-k_0-1\}.
\end{aligned}\tag{24}$$

При $\widehat{p}_s\in(0,\frac{1}{n+2b+s+\max\limits_{1\leq j\leq m+1}\{q_j-r_j-(j)\}})$, $s=\overline{0,l}$ умови (24) виконуються.

Розглянемо $\frac{1-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}+k_0+1=\frac{2-n+k_0-\widehat{p}_s(s+k_0+1)}{1-\widehat{p}_s}>\frac{1-n+k_0}{1-\widehat{p}_s}>0$, оскільки $\widehat{p}_s<\frac{1}{s+k_0+1}$ та $k_0\geq n-1$; $\frac{2b-n-s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}+k_0+1=\frac{2b-n+k_0-\widehat{p}_s(s+k_0+1)}{1-\widehat{p}_s}>\frac{2b-n+k_0-1}{1-\widehat{p}_s}>\frac{2b-2}{1-\widehat{p}_s}>0$, так як $\widehat{p}_s<\frac{1}{s+k_0+1}$, $k_0\geq n-1$ та $b\in\mathbb{N}$; $-\frac{s\widehat{p}_s}{1-\widehat{p}_s}+k_0+1=\frac{k_0+1-\widehat{p}_s(s+k_0+1)}{1-\widehat{p}_s}>\frac{k_0}{1-\widehat{p}_s}>0$, так як $\widehat{p}_s<\frac{1}{s+k_0+1}$ та $k_0\geq n-1$.

Отже, нерівності щодо $\mu_1$, $\mu_2$ набувають вигляду

$$\max\{\max_{\substack{s:\,A_s\neq0\\0\leq s\leq l}}\{s-\frac{1}{\widehat{p}_s}\};\,-k-1\}<\mu_1\leq-k_0-1,$$

$$\max\{\max_{\substack{s:\,A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}}\{s-\frac{2b}{\widehat{p}_s}\};\,-k-2b\}<\mu_2\le -k_0-1.$$

З цих нерівностей одержуємо умову

$$\max_{1\le j\le m+1}\{q_j-r_j-(j)\}<\min_{\substack{s:\,A_s\neq 0\\ 0\le s\le l}}\{\frac{1}{\widehat{p}_s}-s\}-n-2b,$$

яка зв'язує порядки сингулярностей крайових, початкової функцій із властивостями $F_0(x,t,z)$, що задовольняє (7). ■

Таким чином, у статті розглянуто нормальну крайову задачу для квазілінійної параболічної системи, коли задані на параболічній межі функції є узагальненими з просторів типу $D'$. Використовуючи властивості матриці Ґріна цієї задачі та теорему Шаудера про нерухому точку, встановлено характер поведінки розв'язку цієї задачі біля межі області.


1. *Дубинский Ю.А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // УМН. – 1968. –Т. 23, № 1(139). – С. 45 – 90.
2. *Івасишен С.Д.* Інтегральне зображення розв'язків загальних параболічних крайових задач і коректна розв'язність у просторах зростаючих функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1973.– № 7. – С. 596 – 599.
3. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.– К.: Выща школа. – 1990. – 200 с.
4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука. – 1964. – 443 с.
5. *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // ДАН СССР. – 1971. – Т.197, № 2. – С. 261 – 264.
6. *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Труды Моск. мат. о-ва. – 1970.– Т. 23. – С. 179 – 234.
7. *Солонников В.А.* О матрицах Грина для параболических краевых задач.//Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1969. – Т. 14. – С.256 – 287.
8. *Sun Ren-bin.* Local existence and blow-up for degenerate parabolic systems // J. Xiamen Univ. Natur. Sci. – 2003. – Vol. 42, № 2. – p. 148 – 149.
9. *Duan Zhi-wen, Zhou Li.* Global and blow-up solutions for non-linear degenerate parabolic system // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – Vol. 26, № 7. – p. 557 – 587.
10. *Wang Ling-zhi.* Boundedness and blow-up behavior for generalized heat-conduction system // Chin. J. Eng. Math. – 2003. – Vol. 20, № 2. – p. 46 – 52.
11. *Li Huiling, Wang Mingxin.* Blow-up rate for a semilinear parabolic system // J. Southeast Univ. –2002. – Vol. 18, № 1. – p. 99 – 102.
12. *Wang Mingxin.* Blow-up rate for a semilinear reaction diffusion system // Comput. and Math. Appl. – 2002. – Vol. 44, №5 - 6. – p. 573 – 585.
13. *Boccardo L., Gallouët Th.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data//J. Funct. Anal. – 1989. – Vol. 87. – p. 149 – 169.
14. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій $D'$. – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002. – 285 с.
15. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщённых функций // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 6. – С. 795 – 798.
16. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

17. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці ЧДУ. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 82 – 88.
18. *Лопушанська Г. П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Математичні Студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179 – 190.
19. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 1. – С. 35 – 45.
20. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t = \triangle u + F_0(x,t,u)$ // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, № 1. – С.45 – 56.
21. *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134 – 143.
22. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, Гл. ред. ф.-м. лит. – 1988. – 512 с.
23. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Існування та регулярність розв'язків узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійних параболічних систем // Математичний вісник НТШ – 2005. – Т. 2. – С. 123 – 134.

*Львівський державний університет*
*безпеки життєдіяльності,*
*вул. Клепарівська, 35, 79000, Львів, Україна*
o_chmyr@yahoo.com

Отримано 8.02.11