НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ

XVII міжвузівської
науково-практичної конференції

"Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах"

ЛЬВІВ – 2012

Відповідальні за випуск:

канд. фіз.-мат. наук Мохонько Валентина Дмитрівна (Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка")

канд. пед. наук Васіна Людмила Степанівна (Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка")

Паславський Роман Миколайович (Технічний колледж Національного університету "Львівська політехніка")

Матеріали XVII міжвузівської науково-практичної конференції "Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах" / "Українські технології". Методичні проблеми. Львів, 2012. – 72 с.

ISBN 966-666-068-7

До збірникаувійшлиматеріали XVIIміжвузівськоїнауково-практичноїконференції «*Методичніпроблемивикладання математики у вищихнавчальних закладах*», яка проходила 22 лютого 2012 року у Технічному коледжі Національного університету «Львівська політехніка».

Зміст

1. ***ПритулаЯ.Г.***, канд. ф.-м.н., Львівськийнаціональнийуніверситетіменіlвана Франка
Віхи життя Стефана Банаха........ 1
2. ***Чуйко Г.І.***, канд. ф.-м.н., доцент, ЛьвівськийНаціональнийуніверситетіменіІвана Франка
Відображення і функції........ 4
3. ***Черемних Є.В.***, доктор ф.-м. н., проф., Національнийуніверситет "Львівськаполітехніка"
Декілька зауважень до курсу вищої математики........ 7
4. ***Кревс В.Є.***, канд.ф-м н., доцент, завідувач підготовчого відділення для іноземних громадян Львівського національного університету імені Івана Франка, ***Мохонько В.Д.***, канд.ф-м н., доцент, Технічний коледж Національногоуніверситету "Львівська політехніка"
Про новий підручник з математики для студентів-іноземців, слухачів підготовчих відділень України 13
5. ***Мохонько А.З.***, доктор ф.-м. н., проф., Національнийуніверситет "Львівськаполітехніка", ***Мохонько В.Д.***, канд. ф.-м. н., ***Васіна Л.С.***, канд. пед. н., ТехнічнийколеджНаціональногоуніверситету "Львівськаполітехніка"
Про інтеграційні зв'язки знань з математики та спеціальних дисциплін 14
6. ***Тацій Р. М.***, доктор ф.-м. н., проф. ,***СтасюкМ. Ф.***, канд. ф.-м. н., Львівськийдержавнийуніверситетбезпекижиттєдіяльності
Псевдооберненаматриця та їїзастосування 18
7. ***Гроза В.А.***,канд. ф.-м.н., доцент, ***Томащук О.П.***, канд. пед. н., доцент, ***Бохонова Т.Ю.***, ст. викл.,Національнийавіаційнийуніверситет,м.Київ
Лещинський О.Л., канд. ф.-м.н., доцент, заступник директора,***Тихонова В.В***, викладач кафедри прикладної математики, Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету, м. Київ
Розв'язування деяких видів систем алгебраїчних рівнянь як засіб пропедевтики поняття рекурсії........ 23
8. ***Лещинський О.Л.***, канд. ф.-м.н., доцент, заступник директора, ***Левченко В.В.***, Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету, м. Київ
Профільна диференціація навчання математикив концепції математичної освіти молодших спеціалістів 27
9. ***Тищенко С.І.***, канд. пед. н.,доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський державний аграрний університет
До питання вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики менеджерами-економістами в аграрних ВУЗах 30
10. ***Карабин О.О.***, канд. ф.-м. н.,***Чмир О.Ю.***, канд. ф.-м. н., ***Меншикова О.В.***, канд. ф.-м. н., Львівськийдержавнийуніверситетбезпекижиттєдіяльності
Про групу Галуа алгебраїчного рівняння 32
11. ***Клюйник І.І.*** ,канд. техн. н.,***Петрович Р.Й.***, канд. ф.-м. н ,Національнийуніверситет "Львівськаполітехніка"
Агрегативно-ітеративніалгоритми для наближеногорозв'язаннярівнянняліінійнийрівнянь в банаховомупросторі 36
12. ***Глушик М.М.***,канд.ф.-м.н., доцент, Львівська комерційна академія
Проблеми використання тестової перевірки знаньпри вивченні математичних дисциплін........ 38

Як видно з діаграми, розподіл самооцінок характеризується кривою Гаусса. Це свідчить про те, що сьогодні навчання з теорії ймовірностей і математичної статистики, мало задовольняє молодь, а деяка частина студентів вважає її навіть зайвою. Крім того, відсутність розуміння й усвідомлення студентами значущості прикладного аспекту ймовірнісно-статистичних методів в майбутній професійній діяльності викликає труднощі під час навчання теорії ймовірностей і математичної статистики не тільки специфікою навчальної дисципліни як науки.

Вважаємо, що отримані результати дослідження мають стати складовою в процесі вдосконалення педагогічних технологій навчання теорії ймовірностей і математичної статистики менеджерами-економістами у вищих аграрних навчальних закладах, яка закладає підґрунтя для успішного засвоєння дисциплін економічного циклу.

Про групу Галуа алгебраїчного рівняння

Карабин О. О., Чмир О. Ю., Меншикова О. В
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Норвезький математик Н. Абель з'ясував неможливість розв'язання в радикалах рівняння вище четвертого степеня. Він довів, що не існує універсальної формули подання коренів рівняння п'ятого і вищих степенів через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій. З праць Абеля, проте, не випливало, що зовсім не існує окремих рівнянь п'ятого, шостого і вищих степенів, які розв'язуються в радикалах. Отже, пошук критерію розв'язуваності рівняння в радикалах тривав. Успішно завершив його у першій половині XIX ст. геніальний французький математик Е. Галуа.

В основу своєї теорії Галуа поклав поняття групи. Нехай нам дано множину G з деякою бінарною на ній операцією, яку будемо називати *множенням*. Тоді G називається *групою*, якщо виконуються такі умови:

а) множення підлягає асоціативному закону: $(a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c)$ для будь-яких елементів a, b, c із G;

б) у G існує принаймні один такий елемент e, що $e\otimes a = a\otimes e$ для всякого $a \in G$. Елемент e називається одиничним, або одиницею групи G;

в) для будь-якого елемента $a \in G$ існує принаймні один такий елемент $a^{-1} \in G$, що $a\otimes a^{-1} = a^{-1}\otimes a = e$. Цей елемент називається оберненим до елемента a.

Трапляється, що деяка підмножина H сукупності елементів групи G в свою чергу становить групу. Тоді H називається *підгрупою групи* G. Підгрупою групи G можна вважати саму групу G і групу E, яку утворює лише одиничний елемент групи G. Ці групи називаються *тривіальними*.

Нехай H є нетривіальною підгрупою скінченої групи G. Візьмемо який-небудь елемент a групи G і утворимо всі добутки ah, де $h \in H$. Позначимо сукупність таких добутків через aH. Очевидно, що H і aH мають однакове число елементів, бо з умови $ah_1 = ah_2$; $h_1, h_2 \in H$ випливає, що $h_1 = h_2$ ($ah_1 = ah_2, a^{-1}ah_1 = a^{-1}ah_2$, $eh_1 = eh_2$, $h_1 = h_2$). Взявши інший елемент $a_1 \in G$, дістанемо ще одну сукупність a_1H. Виявляється, що сукупності aH і a_1H або збігаються, або не мають жодного спільного елемента: якщо $ah = a_1h_1$, де $hh_1 \in H$, то $a_1 = ahh_1^{-1}$, $a_1H = ahh_1^{-1}H = a(hh_1^{-1}H) = aH$, бо $hh_1^{-1} \in H$. Сукупність aH називається *лівим суміжним класом* за підгрупою H, що породжується елементом a. Очевидно, *сама підгрупа H буде суміжним класом, який породжується одиничним елементом групи G або іншим елементом, який належить підгрупі H.* Через те, що кожен елемент групи G може належати тільки одному лівому суміжному класу, то всі різні ліві суміжні класи поділяють елементи групи на частини, у кожній з яких m елементів, якщо порядок групи дорівнює m. Число всіх різних можливих лівих суміжних класів позначимо s і називатимемо *індексом підгрупи H відносно G.* Якщо порядок групи G дорівнює n, то можемо записати $n= sm$. Отже, *порядок підгрупи скінченної групи є дільником порядку групи.* Це твердження в теорії груп називають *теоремою Лагранжа.*

Можна розглядати також і праві суміжні класи Ha за підгрупою H, які породжуються елементами a групи G, і переконатися, що їх число дорівнює числу лівих суміжних класів. Праві та ліві суміжні класи за H, що породжуються елементом a групи G, не завжди збігаються, бо бінарна групова операція, взагалі кажучи, не є комутативною. Якщо для двох елементів a, b групи G виконується співвідношення $ab = ba$, то елементи a, b називаються *комутативними.* Якщо всі елементи групи будуть комутативними, саму групу називають *комутативною*, або *абелевою.*

Найважливішою серед підгруп групи G є так звана *інваріантна підгрупа*, або *нормальний дільник групи G.* Так називають підгрупу, для якої $aH = Ha$, тобто лівий і правий суміжні класи, що породжені довільним елементом a групи G, збігаються.

Очевидно, що *в комутативній групі будь-яка її підгрупа буде нормальним дільником, а найпростішими прикладами нормальних дільників будь-якої групи G будуть одинична група E і сама група G.* Якщо і інших нормальних дільників група G не має, то вона називається *простою групою.*

Нехай H – нормальний дільник групи G. Тоді сукупність лівих (і правих) суміжних класів за H буде утворювати групу. Щоб в цьому переконатись, спочатку нагадаємо, що $hH=H$, якщо $h \in H$. Через HH позначимо сукупність hH, коли за h беруться всі елементи H. Отже, $HH = H$. Покладемо це співвідношення в основу означення бінарної операції на множині всіх лівих суміжних класів. Візьмемо два суміжні класи a_1H, a_2H. Добуток їх $a_1H \cdot a_2H = a_1a_2HH$, бо $a_1, a_2 \in G$ і $Ha_2 = a_2H$. Крім того $a_1H \cdot a_2H = a_1a_2H$, де a_1a_2 - деякий елемент a_3 групи G. Отже, *добуток суміжних класів є також суміжним класом.* Одиничним елементом буде сам нормальний дільник H, а за обернений елемент до a_1H приймаємо $a^{-1}H$. Асоціативний закон має місце: $(aHbH)cH=aH(bH\cdot cH)$, бо кожний з цих добутків дорівнює $abc\cdot H$. Група лівих (і правих) суміжних класів, на які ділиться група G за її нормальним дільником H, називається *додатковою до H групою* і позначається через G/H. *Порядок додаткової групи дорівнює індексу H в G.*

Максимальним нормальним дільником H групи G є такий нормальний дільник, який не входить до складу жодного іншого нормального дільника групи G, відмінного від неї самої. Те, що H є максимальним нормальним дільником G записують так $G \supset H$.

Композиційним рядом скінченої групи G називається така послідовність її підгруп, яка починається з G і закінчується одиничною групою, причому кожний член цієї послідовності є максимальним нормальним дільником попереднього члена.

Отже, якщо

$$G \supset H \supset K \supset L \supset \ldots \supset T \supset E$$

є композиційним рядом групи G, то H є максимальним нормальним дільником G, K – максимальним нормальним дільником H, L – максимальним нормальним дільником K, ..., E – одиничною групою.

Індекси H в G, K в H, L в K, ..., E в T (порядки додаткових груп G/H, H/K, ..., T/E) називаються *індексами композиційного ряду групи G*. Якщо всі індекси композиційного ряду групи G є простими числами, то G називається *розв'язуваною* групою. В іншому випадку кажуть, що група є *нерозв'язуваною*.

Група G може мати кілька різних максимальних дільників, а тому і не один композиційний ряд. Проте, коли принаймні за одним із них встановлюється розв'язуваність групи, то і всі інші матимуть таку ж властивість.

Розглянемо рівняння n-го степеня:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

Коефіцієнти якого вважаються заданими. Сукупність чисел, які можна дістати з його коефіцієнтів за допомогою дій додавання, віднімання, множення і ділення, називають *основним полем*, або *областю раціональності рівняння*. Позначимо її через P. Якщо, наприклад, коефіцієнти будуть комплексними, то областю раціональності буде множина комплексних чисел, якщо ж коефіцієнти будуть раціональними, то P є множиною раціональних чисел.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будуть коренями даного рівняння. Сукупність чисел, які можна утворити з цих коренів за допомогою дій додавання, віднімання, множення і ділення, позначимо через K і називатимемо *полем розкладу рівняння*. Так, полем розкладу рівняння $x^2+1=0$ буде сукупність комплексних чисел.

Оскільки коефіцієнти рівняння виражаються через його корені за допомогою дій додавання і множення (формули Вієта, $a_0 = 1$), то *поле розкладу містить в собі область раціональності, або ці дві множини співпадають.*

Вважаючи, що корені даного нам рівняння є різними, візьмемо будь-яку підстановку з його коренів, наприклад:

$$s = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & \ldots & x_{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Ця підстановка корінь x_1 замінює коренем x_{α_1}, корінь x_2 – коренем x_{α_2}, ..., корінь x_n – коренем x_{α_n}. Під час здійснення таких замін, що визначаються підстановкою s, ліві частини формул Вієта, як неважко переконатись, не змінюють свого значення. Цю властивість словами виражають так: *підстановка s коефіцієнти рівняння залишає незмінними.* Її має кожна підстановка n-го степеня з коренів рівняння. Між коренями рівняння можуть існувати деякі залежності, що визначаються співвідношеннями виду $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, де $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – цілий раціональний вираз, коефіцієнти якого належать області раціональності P (його складено з коренів рівняння та чисел із множини P за допомогою скінченних операцій додавання, віднімання та множення).

Прикладами цілих раціональних співвідношень між коренями x_1, x_2, x_3 рівняння $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (x_1, x_2, x_3 – відмінні від 1 корені рівняння $x^4 - 1 = 0$) будуть:
$x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1 = 0$; $x_1x_2x_3 + 1 = 0$ (отримані на основі формул Вієта), $x_1^2 - x_2 = 0$ (бо $x_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}$); $x_1^3 - x_2 = 0$ (бо $x_3 = x_1^3$, $x_1x_3 - 1 = 0$) і т.д.

Розглянемо множину M усіх цілих раціональних співвідношень $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ між коренями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рівняння та сукупність G таких підстановок n - го степеня з коренів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, кожна з яких або зовсім не змінює співвідношення $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ або переводить його в інше співвідношення $r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Отже, *підстановка s не належатиме до G, якщо принаймні одне із співвідношень $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ вона переводить у співвідношення $r_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$.*

Переконаємось, що G є групою. За бінарну операцію на множині G візьмемо множення підстановок. Якщо підстановка s співвідношення $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ переводить у співвідношення $r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, а підстановка t співвідношення $r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ переводить у співвідношення $r_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, то st переводить $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ у $r_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Тому st є елементом G. Одинична підстановка належить до G, бо кожне із співвідношень $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ вона залишає незмінним. Якщо s належить до G, то й обернена підстановка s^{-1} теж буде елементом G. Отже, сукупність G є групою.

Групу G називають *групою Галуа даного рівняння.*

Побудуємо, наприклад групу Галуа для квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ з раціональними коефіцієнтами, що має два різні ірраціональні корені x_1, x_2. Кожне ціле раціональне співвідношення між коренями x_1, x_2 можна записати у вигляді $ax_1 + bx_2 + cx_1x_2 + d = 0$, бо, наприклад, $x_1^2 = -px_1 - q$, тобто всякий степінь кореня можна знизити до 1 за допомогою рівняння (a, b, c, d – раціональні числа). Оскільки $x_1x_2 = q$, $x_2 = -p - x_1$, то $(a-b)x_1 + cq + d - bp = 0$ і $a = b$ (якщо $a \neq b$, то $x_1 = \dfrac{bp - d - cq}{a - b}$ – раціональне число). Отже, всякому раціональному співвідношенню між x_1, x_2 можна надати вигляду $a(x_1 + x_2) + cq + d = 0$. Будь-яке з таких співвідношень не змінюється при кожній з підстановок із коренів x_1, x_2 другого степеня. Тому симетрична група S_2 буде групою Галуа розглядуваного рівняння.

Скласти групу Галуа для будь-якого рівняння, не розв'язуючи його, є досить складною задачею. Лише в окремих випадках вона розв'язується порівняно просто. Так, можна переконатись, що *групою Галуа загального зведеного алгебраїчного рівняння n – го степеня буде симетрична група перестановок S_n.* Можна вказати також і на рівняння з числовими коефіцієнтами, для яких групою Галуа буде симетрична група. Взагалі, *рівняння простого степеня n (n – просте число) з раціональними коефіцієнтами має групу Галуа S_n, якщо його ліва частина не розкладається на множники з раціональними коефіцієнтами й існує лише одна пара комплексних коренів.*

Поняття групи Галуа в теорії алгебраїчних рівнянь має численні застосування, оскільки *розв'язуваність групи Галуа деякого рівняння є необхідною і достатньою умовою для того, щоб це рівняння розв'язувалось в радикалах.* Це твердження повністю узгоджується з нашими відомостями про можливість розв'язати в радикалах рівняння другого, третього та четвертого степенів. Групи Галуа загальних зведених рівнянь цих степенів – відповідно симетричні розв'язувані групи S_2, S_3, S_4. До рівнянь, які не розв'язуються в радикалах належать загальні зведені рівняння n – го степеня ($n \geq 5$), бо їхня група Галуа S_n ($n \geq 5$) є нерозв'язуваною. Розглянемо рівняння $x^5 - 4x - 2 = 0$. Воно має три дійсні корені. Відокремлюючими проміжками будуть $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[1, 2]$. Ще два його корені є комплексними. Коефіцієнти лівої частини, крім старшого, діляться на просте число 2, але вільний член не ділиться на 2^2. Отже, група Галуа цього рівняння є симетричною групою S_{5}, і рівняння не розв'язується в радикалах. Не розв'язуються в радикалах, зокрема і рівняння $x^5 - 49x - 7 = 0$, $x^5 - 25x - 7 = 0$.

Слід зазначити, що теорія груп, яка виникла в зв'язку із, здавалося б, суто алгебраїчною проблемою розв'язуваності рівнянь в радикалах, довгий час вважалась найбільш «чистою» математичною дисципліною, позбавленою будь-якої практичної цінності, проте сьогодні апарат теорії груп є одним з найширше застосовуваних не лише в різних розділах математики (геометрія, топологія), а й поза нею (кристалографія, теорія елементарних частинок).

Агрегативно-ітеративні алгоритми для наближеного розв'язання рівняння лінійний рівнянь у банаховому просторі

Клюйник І. І., Петрович Р. Й.,
Національний університет "Львівська політехніка"

Нехай A – компактний оператор, який допускає спектральне представлення $A = \sum_i \mu_i P_i$, де $\mu_i \in R^1$ – власні значення, P_i – власні проектори оператора A, причому справджуються нерівності

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots \geq |\mu_m| > |\mu_{m+1}| \geq \ldots, \qquad |\mu_{m+1}| < 1. \tag{1}$$

Вважаємо, розв'язок лінійного рівняння

$$x = Ax + b \tag{2}$$

де x, b ∈ E, A: E→E, E – простір Банаха, існує і єдиний.

Нехай задані $\varphi_i \in E^*$, $\psi_i \in E$, $\lambda_i \in R^1$, $\lambda_i \neq 1$ i=1,...m і справджуються співвідношення $\varphi_i(\psi_i) = \delta_{ii}$. Побудуємо проектори $P_i x = \psi_i \varphi_i(x)$ і подамо оператор A у вигляді $A = A_1 + A_2$, де $A_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$. Запровадимо нові змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Позначимо через $y \in R^m$ вектор-стовпець $(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$. Позначимо через $\Phi : E \to R^m$ лінійний компактний оператор, що переводить довільний елемент $z \in E$ в елемент $u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in R^m$ за законом $u_i = \varphi_i(z)$, $i=1,\ldots,m$. Рівняння (2) занурюємо у ширший простір $W = E \times R^m$ шляхом приєднання рівняння

$$y = \Lambda y - \Phi A_2 x. \tag{3}$$

де $\Lambda : R^m \to R^m$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Побудуємо лінійний компактний оператор $a : R^m \to E$, що переводить вектор $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$ в елемент $z \in E$ за законом

$$z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \quad a_i \in E, \quad i = 1, \ldots, m,$$

і оператор $\alpha : R^m \to R^m$, для яких справджується $\Phi a + \alpha = \Lambda$.

Запровадимо до розгляду множину