ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.718 № 718, (2011) с. 61–69

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.718 No 718, (2011) 61–69

ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАЙПРОСТІШИХ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Р. М. Тацій[a], М. Ф. Стасюк[a], О. О. Власій[b]

[a] *Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,*
вул. Клепарівська, 35, 79058, м. Львів, Україна
[b] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,*
вул. Шевченка, 57, 76025, Івано-Франківськ, Україна

(Отримано 17 червня 2011 р.)

Для квазідиференціальних рівнянь другого порядку спеціального вигляду з кусково-сталими коефіцієнтами і узагальненими правими частинами в декартових, сферичних та циліндричних системах координат отримано розв'язки двоточкових задач у замкненій формі. Ці розв'язки виражаються через коефіцієнти рівнянь, праві частини та крайові умови і справедливі для довільного розбиття відрізка інтегрування.

Ключові слова: квазіпохідна, функція обмеженої варіації, функція Дірака, матриця Коші, крайові умови.

2000 MSC: 34B60

УДК: 517.91

I. Основні позначення та постановка задач

Розглянемо одновимірне квазідиференціальне рівняння (КДР)

$$div\,(\lambda grad\, y) = f. \tag{1}$$

Умови на функції $\lambda(x)$ і $f(x)$ будуть накладені нижче. У декартових, сферичних та циліндричних координатах відповідно КДР (1) набуває вигляду:

$$(\lambda y')' = f, \tag{2}$$

$$(\lambda y')' + \frac{2}{x}(\lambda y') = f, \quad x > 0, \tag{3}$$

$$(\lambda y')' + \frac{1}{x}(\lambda y') = f, \quad x > 0. \tag{4}$$

Нехай $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$ – довільне розбиття відрізка $[x_0, x_n]$ на n частин.

Надалі використовуватимемо такі позначення:

- Θ_k – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_k, x_{k+1})$, тобто
$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, x \in [x_k; x_{k+1}); \\ 0, x \notin [x_k; x_{k+1}). \end{cases}$$
- $\delta_k = \delta_k(x - x_k)$ – функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$;
- $BV^+[x_0, x_n]$ – клас неперервних праворуч функцій обмеженої на $[x_0, x_n]$ варіації;
- $\Delta_k\varphi = \Delta\varphi(x_k) = \varphi(x_k) - \varphi(x_k - 0)$ – стрибок функції $\varphi(x) \in BV^+[x_0, x_n]$ в точці $x = x_k$;
- $d_k x = x_k - x_{k-1}$;
- $y^{[1]} = \lambda y'$ – квазіпохідна.

Приймемо

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \Theta_k + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta_k,$$

де λ_k, r_k, s_k – дійсні числа, причому вважатимемо, що $\lambda_k > 0\ \forall k = \overline{0, n-1}$.

Тоді КДР (2), (3), (4) набудуть відповідно вигляду:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k y'\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \Theta_k + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta_k, \tag{5}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k y'\right)' + \frac{2}{x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k y'\right) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \Theta_k + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta_k, \tag{6}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Theta_k y'\right)' + \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Theta_k y'\right) = $$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} r_k\Theta_k + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\delta_k. \quad (7)$$

До кожного з КДР (5), (6), (7) слід додати систему двох лінійно незалежних крайових умов, що в загальному випадку є нелокальними, а саме:

$$\begin{array}{l} p_{11}y_0 + p_{12}y_0^{[1]} + q_{11}y_n + q_{12}y_n^{[1]} = \gamma_1, \\ p_{21}y_0 + p_{22}y_0^{[1]} + q_{21}y_n + q_{22}y_n^{[1]} = \gamma_2, \end{array} \quad (8)$$

де $y_k^{[i]} = y^{[i]}(x_k), i = 0, 1, k = 0, n, (y^{[0]} = y)$, а $p_{ij}, q_{ij}, \gamma_i, (i, j = 1, 2)$ – задані дійсні числа.

II. Узагальнена система диференціальних рівнянь першого порядку з кусково-змінними коефіцієнтами

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\bar{Y}' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k\Theta_k\right)\bar{Y} + \sum_{k=0}^{n-1}\bar{R}_k\Theta_k + \sum_{k=1}^{n-1}\bar{S}_k\delta_k \quad (9)$$

на проміжку $[x_0, x_n]$ з початковою умовою

$$\bar{Y}(x_0) = \bar{Y}^0, \quad (10)$$

де $\bar{Y}, \bar{R}_k, \bar{S}_k$ – m-вимірні вектори, $A_k(x)$ – неперервні на $[x_k, x_{k+1})$ $m \times m$ матриці-функції , $\bar{Y}$- невідомий вектор, а $\bar{S}_k$ і $\bar{R}_k$ - числові вектори. На кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1})$ система (9) має вигляд

$$\bar{Y}'_{(k)} = A_k\bar{Y}_{(k)} + \bar{R}_k + \bar{S}_k\delta_k. \quad (11)$$

Надалі вважатимемо, що для відповідної однорідної системи

$$\bar{Y}'_{(k)} = A_k\bar{Y}_{(k)}, k = \overline{0, n-1}. \quad (12)$$

відома фундаментальна матриця (матриця Коші) $B(x, s)$, що має такі властивості [1]:

- за змінною x вона справджує матричне рівняння $B'_k(x, s) = A_k B_k(x, s)$;
- $B(s, s) = E$, де E – одинична матриця;
- $\forall x_1, x_2, x_3 \subset [x_k, x_{k+1})$ справджується рівність
$$B_k(x_3, x_2)\cdot B_k(x_2, x_1) = B_k(x_3, x_1).$$

Далі введемо таке позначення: $\forall k \geq i$

$$B(x_k, x_i) = \prod_{j=1}^{k-i} B_{k-j}(x_{k-j+1}, x_{k-j}), \quad (13)$$

при цьому $B(x_k, x_k) = E$.

Розв'язок рівняння (11) на проміжку $[x_k, x_{k+1})$ шукатимемо у вигляді

$$\bar{Y}_k = B_k(x, x_k)\bar{P}_k + \int_{x_k}^{x} B_k(x, s)\bar{R}_k ds,$$

де $\bar{P}_k$ – невідомий вектор, який визначимо згодом.

Аналогічно запишемо розв'язок рівняння (11) на проміжку $[x_{k-1}, x_k)$

$$\bar{Y}_{k-1} = B_{k-1}(x, x_{k-1})\bar{P}_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x} B_{k-1}(x, s)\bar{R}_{k-1} ds.$$

У точці $x = x_k$ для розв'язку рівняння (9) повинна виконуватись умова спряження [2]

$$\bar{Y}_k(x_k) = \bar{Y}_{k-1}(x_k) + \bar{S}_k,$$

яка приводить до рекурентного співвідношення

$$\bar{P}_k = B_{k-1}(x_k, x_{k-1})\bar{P}_{k-1} + $$
$$+ \int_{x_{k-1}}^{x_k} B(x_k, s)\bar{R}_k ds + \bar{S}_k. \quad (14)$$

Прийнявши $\bar{P}_0 = \bar{Y}^0(\bar{Y}^0$, методом математичної індукції з (14) отримуємо, що

$$\bar{P}_k = B(x_k, x_0)\bar{Y}^0 + \sum_{i=0}^{k} B(x_k, x_i)\bar{Z}_i,$$

де позначено

$$\bar{Z}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s)\bar{R}_{i-1} ds + \bar{S}_i, i = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

причому слід прийняти $\bar{Z}_0 = 0, \quad \bar{S}_n = 0$.

Отже, ми отримали такий результат:

Теорема 2.1. *На кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1})$ початкова задача (задача Коші) (9)-(10) має єдиний розв'язок $\bar{Y}_k(x) \in BV^+[x_k, x_{k+1})$, який можна подати $\forall k = \overline{0, n-1}$ у вигляді*

$$\bar{Y}_k(x) = B_k(x, x_k)B(x_k, x_0)\bar{Y}^0 + $$
$$+ B_k(x, x_k)\sum_{i=0}^{k} B(x_k, x_i)\bar{Z}_i + \int_{x_k}^{x} B_k(x, s)\bar{R}_k ds, \quad (16)$$

де матриці $B(x_k, x_i)$ та вектори $\bar{Z}_i$ обчислюються за формулами (13) і (15) відповідно, причому $\bar{Z}_0 = 0$, $\bar{S}_n = 0$, $B(x_k, x_k) = E$.

До початкової задачі (9)–(10), як відомо [2], зводяться й багатоточкові задачі. Нагадаємо схему такого зведення на прикладі крайової (двоточкової) задачі, додавши до системи (9) крайові умови вигляду

$$P\bar{Y}(x_0) + Q\bar{Y}(x_n) = \bar{\Gamma}, \tag{17}$$

де P і Q – квадратні $m \times m$ матриці з дійсними елементами, $\bar{\Gamma}$ – m-вимірний вектор дійсних чисел. Щоб скористатись формулою (16), виразимо початковий вектор $\bar{Y}^0 \stackrel{df}{=} \bar{Y}(x_0)$ з умови (17), зауваживши при цьому, що

$$\bar{Y}(x_n) = \bar{P}_n = B(x_n, x_0)\bar{Y}^0 + \sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i)\bar{Z}_i.$$

Далі послідовно отримуємо

$$P\bar{Y}^0 + Q\bar{P}_n = \bar{\Gamma} \Leftrightarrow P\bar{Y}(x_0) + Q\bar{Y}(x_n) = \bar{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\bar{Y}^0 + Q\left[B(x_n, x_0)\bar{Y}^0 + \sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i)\bar{Z}_i\right] = \bar{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [P + QB(x_n, x_0)]\bar{Y}^0 + Q\sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i)\bar{Z}_i = \bar{\Gamma}.$$

Звідси

$$\bar{Y}^0 = [P + QB(x_n, x_0)]^{-1}\left[\bar{\Gamma} - Q\sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i) Z_i\right]. \tag{18}$$

Отже, отримано такий результат

Теорема 2.2. *За умови*

$$\det[P + QB(x_n, x_0)] \neq 0$$

існує єдиний розв'язок крайової задачі (9), (17), *що на відрізку* $[x_k, x_{k+1})$ *подається у вигляді* (16) *з початковим вектором* $\bar{Y}^0$*, який обчислюється за формулою* (18).

III. Розв'язування вихідних крайових задач методом їх зведення до еквівалентних систем

A Задача (5), (8).

За допомогою векторів

$$\bar{Y} = \left(y, y^{[1]}\right)^T, \quad \bar{R}_k = (0, r_k)^T, \bar{S}_k = (0, s_k)^T$$

та матриці:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

КДР (5) зведеться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку вигляду (9)

$$\bar{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}\Theta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k\Theta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k\delta_k \end{pmatrix} \tag{19}$$

Крайові умови (8) також запишемо у матричному вигляді (17), зауваживши, що в цьому випадку

$$P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}), \bar{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)^T, i, j = 1, 2;$$

$$\bar{Y}(x_0) = \left(y_0, y_0^{[1]}\right)^T, \quad \bar{Y}(x_n) = \left(y_n, y_n^{[1]}\right)^T.$$

Легко переконатись безпосередньою перевіркою, що матриця Коші $B_k(x, s)$ системи, яка є аналогом системи (12)

$$\bar{Y}'_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{Y}_{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

має вигляд

$$B_k(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Це дає можливість за допомогою формули (16) побудувати розв'язок $\bar{Y}_k(x)$ двоточкової задачі (5), (8) шляхом зведення її до задачі Коші. Слід зауважити, що добуток матриць вигляду (20) має просту структуру, а саме, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У зв'язку з цим і використовуючи формули (13), методом математичної індукції отримуємо

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{j=i}^{k-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{j=i+1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Тоді

$$B_k(x, x_k)B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i+1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо ще

$$\int\limits_{x_k}^{x} B_k(x, s)\bar{R}_k ds = \int\limits_{x_k}^{x} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ r_k \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{r_k}{2\lambda_k}(x - x_k)^2 \\ r_k(x - x_k) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Згідно з (15) маємо

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}\left(d_i x\right)^2 \\ r_{i-1} d_i x + s_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

причому $\bar{Z}_0 = (0, 0)^T, s_n = 0$.

Формули (21)–(23) дають можливість повністю описати структуру розв'язку $\bar{Y}_k(x)$.

Приклад 1. Знайти розв'язок КДР (5) за крайових умов:

$$\begin{cases} y\left(x_0\right) = \beta_0, \\ \alpha y\left(x_n\right) + y^{[1]}\left(x_n\right) = \alpha\beta_n, \end{cases} \tag{24}$$

де α, β_0, β_n – задані числа.

Розв'язування. Обчислимо спочатку

$$B_k(x, x_k) \sum_{i=0}^{k} B\left(x_k, x_i\right) \bar{Z}_i = \sum_{i=0}^{k} B\left(x, x_k\right) B\left(x_k, x_i\right) \bar{Z}_i = \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i+1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}\left(d_i x\right)^2 \\ r_{i-1} d_i x + s_i \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}\left(d_i x\right)^2 + \left[r_{i-1} d_i x + s_i\right] \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i+1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}}\right] \\ r_{i-1} d_i + s_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}\left(d_i x\right)^2 + \left[r_{i-1} d_i x + s_i\right] \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i+1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}}\right] \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \left[r_{i-1} d_i x + s_i\right] \end{pmatrix}.$$

Крім того, для довільного початкового вектора $\bar{Y}^0 = \left(y^0, y^{[1]0}\right)^T$ отримуємо:

$$B_k\left(x, x_k\right) B\left(x_k, x_0\right) \bar{Y}^0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^{[1]0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 + \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_j}\right] y^{[1]0} \\ y^{[1]0} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Отже, на основі формули (16) і з врахуванням (22) та (25) отримуємо, що

$$\bar{Y}_k(x) = \begin{pmatrix} y^0 + \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}}\right] y^{[1]0} \\ y^{[1]0} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}\left(d_i x\right)^2 + \left[r_{i-1} d_i x + s_i\right] \cdot \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i+1}^{k} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}}\right] + \frac{r_k}{2\lambda_k}\left(x - x_k\right)^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \left[r_{i-1} d_i x + s_i\right] + r_k\left(x - x_k\right) \end{pmatrix} \tag{26}$$

Для конкретизації початкових значень $y^0, y^{[1]0}$ запишемо крайові умови (24) у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^{[1]0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \bar{P}_n = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha\beta_n \end{pmatrix},$$

звідки (див.(18)) маємо

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^{[1]0} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} B\left(x_n, x_0\right)\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha\beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} B\left(x_n, x_i\right) \bar{Z}_i\right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha\beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}(d_i x)^2 \\ r_{i-1} d_i x + s_i \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha\beta_n - \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{\frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}(d_i x)^2 + (r_i d_i + s_i) \cdot \sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}}\right\} - \sum\limits_{i=1}^{n} \left[r_{i-1} d_i x + s_i\right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sigma_1} & \frac{1}{\sigma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha\beta_n - \alpha\sigma_2 - \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \frac{\alpha\beta_n - \alpha\beta_0 - \alpha\sigma_2 - \sigma_3]}{\sigma_1} \end{pmatrix}.$$

Отже, ми отримали, що

$$y^0 = \beta_0;$$
$$y^{[1]0} = \frac{\alpha(\beta_n - \beta_0 - \sigma_2) - \sigma_3}{\sigma_1},$$

де позначено

$$\sigma_1 = \alpha \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} + 1;$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (d_i x)^2 + [r_i d_i x + s_i] \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{d_j x}{\lambda_{j-1}} \right\};$$

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{n} [r_{i-1} d_i x + s_i].$$

Зауважимо, що умова $y^0 = y_0$ слідує негайно із крайових умов (24).

B Задача (6), (8).

Схеми розв'язування цієї і наступної задач аналогічні до схеми попереднього підрозділу. Відмінності полягають лише в структурах матриць Коші відповідних систем диференціальних рівнянь першого порядку. У зв'язку з цим коментарі до реалізації таких схем будуть зведені до мінімуму.

Ввівши матриці

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\frac{2}{x} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

та, як і в попередньому підрозділі, вектори

$$\bar{Y} = \left(y, y^{[1]}\right)^T, \quad \bar{R}_k = (0, r_k)^T, \quad \bar{S}_k = (0, s_k)^T$$

зведемо КДР (6) до еквівалентної системи

$$\bar{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} \Theta_k} \\ 0 & -\frac{2}{x} \end{pmatrix} \bar{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k \Theta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k \delta_k \end{pmatrix} \tag{27}$$

з відповідними крайовими умовами в матричному вигляді.

У такому випадку матриця Коші системи

$$\bar{Y}'_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\frac{2}{x} \end{pmatrix} \bar{Y}_{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

має вигляд

$$B_k(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{\lambda_k}\left(1 - \frac{s}{x}\right) \\ 0 & \frac{s^2}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи метод математичної індукції за індексом k, маємо

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i^2 \sum\limits_{j=i}^{k-1} \frac{1 - \frac{x_i}{x_{j+1}}}{\lambda_j x_j} \\ 0 & \frac{x_i^2}{x_k^2} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

де $k > i, B(x_k, x_k) = E$.

З останньої рівності отримуємо

$$B(x, x_k) B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_i^2}{\lambda_k x_k}\left(1 - \frac{x_k}{x}\right) + x_i^2 \sum\limits_{j=i}^{k-1} \frac{1 - \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j x_j} \\ 0 & \frac{x_i^2}{x^2} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Далі маємо

$$\int\limits_{x_k}^{x} B_k(x, s) \bar{R}_k ds = \int\limits_{x_k}^{x} \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{\lambda_k}\left(1 - \frac{s}{x}\right) \\ 0 & \frac{s^2}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_k \end{pmatrix} ds =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{r_k}{\lambda_k}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x_k^2}{2} + \frac{x_k^3}{3x}\right) \\ r_k \frac{x^3 - x_k^3}{3x^2} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\bar{Z}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s) \bar{R}_{i-1} ds + \bar{S}_i =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\left(\frac{x_i^2}{6} - \frac{x_{i-1}^2}{2} + \frac{x_{i-1}^3}{3x_i}\right) \\ r_{i-1} \frac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{3x_i^2} + s_i \end{pmatrix}, \ \bar{Z}_0 = \bar{0}, \ s_n = 0. \tag{31}$$

Приклад 2. Знайти розв'язок КДР (6) за крайових умов:

$$\begin{cases} y(x_0) = \beta_0; \\ y(x_n) = \beta_n. \end{cases} \tag{32}$$

Розв'язування. Позначимо

$$\bar{Z}_i \overset{df}{=} \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} + s_i \end{pmatrix}$$

і обчислимо, використовуючи (29)

$$B_k(x, x_k) \sum_{i=0}^{k} B(x_k, x_i) \bar{Z}_i =$$
$$\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_i^2}{\lambda_k x_k}\left(1 - \frac{x_k}{x}\right) + x_i^2 \sum\limits_{j=i}^{k-1} \frac{1 - \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j x_j} \\ 0 & \frac{x_i^2}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} + s_i \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} z_i + \left(z_i^{[1]} + s_i\right)\left[\frac{x_i^2}{\lambda_k x_k}\left(1 - \frac{x_k}{x}\right) + x_i^2 \sum\limits_{j=i}^{k-1} \frac{1 - \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j x_j}\right] \\ \frac{x_i^2}{x^2}\left(z_i^{[1]} + s_i\right) \end{pmatrix};$$

Отже,

$$B_k\left(x,x_k\right)\sum_{i=0}^{k}B\left(x_k,x_i\right)\bar{Z}_i=$$
$$=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{k}z_i+\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\left[\frac{x_i^2}{\lambda_k x_k}\left(1-\frac{x_k}{x}\right)+x_i^2\sum\limits_{j=i}^{k-1}\frac{1-\frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j x_j}\right]\\ \sum\limits_{i=0}^{k}\frac{x_i^2}{x^2}\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\end{pmatrix} \tag{33}$$

На основі (16) з використанням формул (28), (30), (31) та (33) для довільного початкового вектора $\bar{Y}^0=\left(y^0,y^{[1]0}\right)^T$ записуємо аналог формули (26), а саме:

$$\bar{Y}_k\left(x\right)=\begin{pmatrix}y^0+\left(\frac{x_0^2}{\lambda_k x_k}\left(1-\frac{x_k}{x}\right)+x_0^2\sum\limits_{j=i}^{k-1}\frac{1-\frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j x_j}\right)y^{[1]0}\\ \frac{x_0^2}{x^2}y^{[1]0}\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{k}z_i+\left(z_i^{[1]}+s_i\right)G_i+\frac{r_k}{\lambda_k}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x_k^2}{2}+\frac{x_k^3}{3x}\right)\\ \sum\limits_{i=0}^{k}\frac{x_i^2}{x^2}\left(z_i^{[1]}+s_i\right)+r_k\frac{x^3-x_k^3}{3x^2}\end{pmatrix},$$

де позначено

$$G_i=\frac{x_i^2}{\lambda_k x_k}\left(1-\frac{x_k}{x}\right)+x_i^2\sum_{j=i}^{k-1}\frac{1-\frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j x_j}$$

Запишемо тепер крайові умови (32) у вигляді

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\left(x_0\right)\\y^{[1]}\left(x_0\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\left(x_n\right)\\y^{[1]}\left(x_n\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_n\end{pmatrix},$$

тобто в формулі (18) слід прийняти

$$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \bar{\Gamma}=\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_n\end{pmatrix}$$

та відповідні цій задачі матриці $B\left(x_n,x_0\right)$ і вектор $\sum\limits_{i=0}^{n}B\left(x_n,x_i\right)\bar{Z}_i$.

Далі маємо

$$\begin{pmatrix}y^0\\y^{[1]0}\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}B\left(x_n,x_0\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}B\left(x_n,x_i\right)\bar{Z}_i\right]=$$
$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x_0^2\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{1-\frac{x_j}{x_{j+1}}}{\lambda_j x_j}\\0&\frac{x_0^2}{x_n^2}\end{pmatrix}\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix}1&x_i^2\sum\limits_{j=i}^{n-1}\frac{1-\frac{x_j}{x_{j+1}}}{\lambda_j x_j}\\0&\frac{x_0^2}{x_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_i\\z_i^{[1]}+s_i\end{pmatrix}\right];$$

Введемо позначення

$$\sigma_i=x_i^2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1-\frac{x_j}{x_{j+1}}}{\lambda_j x_j},\ i=\overline{0,n}.$$

Тоді отримаємо

$$\begin{pmatrix}y^0\\y^{[1]0}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix}\sigma_0&0\\-1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\\sum\limits_{i=0}^{n}\left[z_i+\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\sigma_i\right]\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}\beta_0\\-\frac{\beta_0}{\sigma_0}+\frac{\beta_n-\sum\limits_{i=0}^{n}\left[z_i-\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\sigma_i\right]}{\sigma_0}\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$y^0=\beta_0,\quad y^{[1]0}=\frac{\beta_n-\beta_0-\sum\limits_{i=0}^{n}\left[z_i-\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\sigma_i\right]}{\sigma_0}.$$

C Задача (7), (8).

Як легко переконатись, КДР (7) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\bar{Y}'=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Theta_k}\\0&-\frac{1}{x}\end{pmatrix}\bar{Y}+\begin{pmatrix}0\\\sum\limits_{k=0}^{n-1}r_k\Theta_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k\delta_k\end{pmatrix}. \tag{34}$$

Матриця Коші системи

$$\bar{Y}_{(k)}'=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\lambda_k}\\0&-\frac{1}{x}\end{pmatrix}\bar{Y}_{(k)},\quad k=\overline{0,n-1}.$$

має вигляд

$$B_k\left(x,s\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{s}{\lambda_k}\ln\frac{x}{s}\\0&\frac{s}{x}\end{pmatrix},$$

на основі чого отримуємо методом математичної індукції, що для $k>i$ справедлива формула

$$B\left(x_k,x_i\right)=\begin{pmatrix}1&x_i\sum\limits_{j=i}^{k-1}\frac{\ln\frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\\0&\frac{x_i}{x_k}\end{pmatrix},$$

звідки отримуємо

$$B_k(x,x_k)B(x_k,x_i)=\begin{pmatrix}1&x_i\left(\frac{\ln\frac{x}{x_k}}{\lambda_k}+\sum\limits_{j=i}^{k-1}\frac{\ln\frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right)\\0&\frac{x_i}{x}\end{pmatrix}. \tag{35}$$

До того ж

$$\int_{x_k}^{x}B_k(x,s)\bar{R}_k\left(s\right)ds=\begin{pmatrix}\frac{r_k}{\lambda_k}\frac{(x-x_k)^2\ln\frac{ex^2}{x_k^2}}{4}\\\frac{r_k\left(x^2-x_k^2\right)}{2x}\end{pmatrix}. \tag{36}$$

Введемо позначення:

$$I_k\left(x\right)=\frac{r_k}{\lambda_k}\frac{\left(x-x_k\right)^2\ln\frac{ex^2}{x_k^2}}{4}; \tag{37}$$

$$I_k^{[1]}(x) = \frac{r_k\left(x^2 - x_k^2\right)}{2x}; \tag{38}$$

а також

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} + s_i \end{pmatrix}, \tag{39}$$

де $z_i = I_{i-1}(x_i)$, $z_i^{[1]} = I_{i-1}^{[1]}(x_i)$, при цьому

$$z_0 = z_0^{[1]} = s_n = 0.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі (7), (8) за умов:

$$\begin{cases} y(x_0) = \beta_0, \\ y^{[1]}(x_n) = \beta_n^{[1]}. \end{cases} \tag{40}$$

Розв'язання. На основі (35) (при $i = 0$) для довільного початкового вектора $\bar{Y}^0 = \left(y^0, y^{[1]0}\right)^T$ маємо

$$B_k(x, x_k)\, B(x_k, x_0)\, \bar{Y}^0 = \\ = \begin{pmatrix} y^0 + x_0\left(\frac{\ln \frac{x}{x_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right) y^{[1]0} \\ \frac{x_0}{x} y^{[1]0} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Необхідно ще обчислити

$$B_k(x, x_k) \sum_{i=0}^{k} B(x_k, x_i)\, \bar{Z}_i = \\ = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k}\left[z_i + x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right)\left(\frac{\ln \frac{x}{x_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j-i}^{k-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right)\right] \\ \frac{1}{x}\sum\limits_{i=0}^{k}\left[x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right)\right] \end{pmatrix} \tag{42}$$

Використовуючи зображення (41), (42) та (36) отримуємо

$$\bar{Y}_k(x) = \begin{pmatrix} y^0 + x_0\left(\frac{\ln \frac{x}{x_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right) y^{[1]0} \\ \frac{x_0}{x} y^{[1]0} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k}\left\{z_i + x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right)\left(\frac{\ln \frac{x}{x_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i}^{k-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right)\right\} \\ \frac{1}{x}\sum\limits_{i=0}^{k} x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} I_k(x) \\ I_k^{[1]}(x) \end{pmatrix} \tag{43}$$

Як і в попередніх прикладах, запишемо крайові умови (40) в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(x_0) \\ y^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(x_n) \\ y^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_n^{[1]} \end{pmatrix},$$

де

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_n^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$B(x_n, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j} \\ 0 & \frac{x_0}{x_n} \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i)\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}\left\{z_i + x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right)\sum\limits_{j=i}^{n-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right\} \\ \frac{1}{x_n}\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right) \end{pmatrix},$$

та на основі (18) отримуємо:

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^{[1]0} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(x_n, x_0)\right]^{-1} \times \\ \times \left[\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_n^{[1]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i)\,\bar{Z}_i\right] = \\ = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_0\sigma_1 \\ 0 & \frac{x_0}{x_n} \end{pmatrix}\right]^{-1} \times \\ \times \left[\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_n^{[1]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \frac{\sigma_3}{x_n} \end{pmatrix}\right],$$

де

$$\sigma_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j},$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n}\left\{z_i + x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} \frac{\ln \frac{x_{j+1}}{x_j}}{\lambda_j}\right\}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{x_n}\sum_{i=0}^{n} x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right).$$

Отже, маємо

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^{[1]0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ x_n\beta_n^{[1]} - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right) \end{pmatrix}.$$

Отже, у формулі (43) слід прийняти:

$$y^0 = \beta_0, y^{[1]0} = \frac{x_n\beta_n^{[1]} - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i\left(z_i^{[1]} + s_i\right)}{x_0}.$$

Фізична інтерпретація отриманих результатів та висновки

У прикладних задачах доволі часто зустрічаються ситуації, коли одна й та ж математична модель (зокрема крайова задача) описує різні процеси. Типовий приклад – задачі про поперечні коливання струни, поздовжні та крутильні коливання стрижнів тощо.

Однією з інтерпретацій крайових задач (5)–(8), (6)–(8) та (7)–(8) є проблема розрахунку стаціонарного температурного поля в багатошарових тілах [3] з урахуванням як неперервних, так і зосереджених внутрішніх джерел тепла.

Якщо в рівняннях (5), (6), (7) функцію $y\,(x)$ інтерпретувати як температуру, а квазіпохідну $y^{[1]}\,(x) = \lambda y'\,(x)$ як тепловий потік, то задача (5), (8) описує стаціонарний процес розподілу температурного поля в n-шаровій нескінченній плиті. Задачі ж (6), (8) та (7), (8) відповідно описують розподіл температурного поля в n-шаровому порожнистому нескінченному циліндрі та в n-шаровій порожнистій кулі. При цьому у випадку плити припускається поширення температури лише в напрямку, що перпендикулярний до її стінок, а у випадку циліндра й кулі – винятково в радіальному напрямку.

У прикладі 1 крайові умови (24) означають, що на лівій $(x = x_0)$ стінці задана температура, а на правій $(x = x_n)$ реалізується теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона.

Приклад 2 ілюструє процес поширення температури, коли на внутрішній $(x = x_0)$ та зовнішній $(x = x_n)$ сферичних поверхнях задана температура.

В прикладі 3 розглядається випадок, коли на внутрішній циліндричній поверхні $(x = x_0)$ задана температура, а на зовнішній $(x = x_n)$ – тепловий потік.

На завершення можна зробити такі висновки:

- загальні розв'язки квазідиференціальних рівнянь (5), (6), (7) для довільного n отримуються в замкненій формі та виражаються винятково через коефіцієнти та праві частини цих рівнянь;
- метод побудови таких розв'язків ґрунтується на зведенні до еквівалентних систем типу (9), (10). Розв'язок задачі Коші для систем диференціальних рівнянь такого типу також зображається в замкненому вигляді, що підсумовано в теоремі 2.1;
- на основі зведення крайових задач до початкових робимо висновок, що розв'язання конкретної задачі не привносить принципових труднощів при зміні крайових умов;
- структура розв'язку задачі (9), (10) дозволяє досліджувати ширше коло задач для квазідиференціальних рівнянь загального вигляду.

Література

[1] Власій О.О., Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". – 2009. – № 660. – С.34–38.

[2] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир. – 1971. – 312 с.

[3] Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1976. – 486 с.

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р.М. Таций[a], М.Ф. Стасюк[a], О.О. Власий[b]

[a] *Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности, ул. Клепаровская, 35, Львов, 79007, Украина*
[b] *Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76025, Украина*

Для квазидифференциальных уравнений второго порядка специального вида с кусочно-постоянными коэффициентами и обобщенными правыми частями в декартовых, сферических и цилиндрических системах координат получены решения двуточечных задач в замкнутом виде. Эти решения выражаются через коэффициенты уравнений, правые части , краевые условия и справедливы для произвольного разбиения промежутка интегрирования .

Ключевые слова: квазипроизводная, функция ограниченной вариации, функция Дирака, матрица Коши, краевые условия.

2000 MSC: 34B60

УДК: 517.91

PIECEWISE CONTINUOUS BOUNDARY PROBLEMS FOR THE SIMPLEST QUASIDIFFERENTIAL EQUATIONS OF ORDER 2

R. M. Tatsij[a], M. F. Stasjuk[a], O. O. Vlasij[b]

[a] *Lviv State University of vital activity safety, 35 Kleparivska Str., 79058, Lviv, Ukraine*
[b] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenko Str., 76025, Ivano-Frankivsk, Ukraine*

There were reached the solutions for two-point problems in closed form for second-order quasidifferential equations with piecewise continuous coefficients and generalized right parts in Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems. These solutions are expressed through the coefficients of equations, their right parts and boudary condition and are valid for random division of interval of integration.

Key words: quasi-derivative, function of bounded variation, Dirac delta function, Cauchy matrix, boundary conditions

2000 MSC: 34B60

УДК: 517.91