НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ

XVII міжвузівської
науково-практичної конференції

"Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах"

ЛЬВІВ – 2012

Відповідальні за випуск:

канд. фіз.-мат. наук Мохонько Валентина Дмитрівна (Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка")

канд. пед. наук Васіна Людмила Степанівна (Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка")

Паславський Роман Миколайович (Технічний колледж Національного університету "Львівська політехніка")

Матеріали XVII міжвузівської науково-практичної конференції "Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах" / "Українські технології". Методичні проблеми. Львів, 2012. – 72 с.

ISBN 966-666-068-7

До збірникаувійшлиматеріали XVIIміжвузівськоїнауково-практичноїконференції «*Методичніпроблемивикладання математики у вищихнавчальних закладах*», яка проходила 22 лютого 2012 року у Технічному коледжі Національного університету «Львівська політехніка».

Зміст

1. ***ПритулаЯ.Г.***, канд. ф.-м.н., ЛьвівськийнаціональнийуніверситетіменіІвана Франка
Віхи життя Стефана Банаха... 1

2. ***Чуйко Г.І.***, канд. ф.-м.н., доцент, ЛьвівськийНаціональнийуніверситетіменіІвана Франка
Відображення і функції... 4

3. ***Черемних Є.В.***, доктор ф.-м. н., проф., Національнийуніверситет "Львівськаполітехніка"
Декілька зауважень до курсу вищої математики... 7

4. ***Кревс В.Є.***, канд.ф-м н., доцент, завідувач підготовчого відділення для іноземних громадян Львівського національного університету імені Івана Франка, ***Мохонько В.Д.***, канд.ф-м н., доцент, Технічний коледж Національногоуніверситету "Львівська політехніка"
Про новий підручник з математики для студентів-іноземців, слухачів підготовчих відділень України 13

5. ***Мохонько А.З.***, доктор ф.-м. н., проф., Національнийуніверситет "Львівськаполітехніка", ***Мохонько В.Д.***, канд. ф.-м. н., ***Васіна Л.С.***, канд. пед. н., ТехнічнийколеджНаціональногоуніверситету "Львівськаполітехніка"
Про інтеграційні зв'язки знань з математики та спеціальних дисциплін 14

6. ***Тацій Р. М.***, доктор ф.-м. н., проф. ,***СтасюкМ. Ф.***, канд. ф.-м. н., Львівськийдержавнийуніверситетбезпекижиттєдіяльності
Псевдооберненаматриця та їїзастосування 18

7. ***Гроза В.А.***,канд. ф.-м.н., доцент, ***Томащук О.П.***, канд. пед. н., доцент, ***Бохонова Т.Ю.***, ст. викл.,Національнийавіаційнийуніверситет,м.Київ
Лещинський О.Л., канд. ф.-м.н., доцент, заступник директора,***Тихонова В.В,*** викладач кафедри прикладної математики, Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету, м. Київ
Розв'язування деяких видів систем алгебраїчних рівнянь як засіб пропедевтики поняття рекурсії... 23

8. ***Лещинський О.Л.***, канд. ф.-м.н., доцент, заступник директора, ***Левченко В.В.***, Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету, м. Київ
Профільна диференціація навчання математикив концепції математичної освіти молодших спеціалістів 27

9. ***Тищенко С.І.***, канд. пед. н.,доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський державний аграрний університет
До питання вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики менеджерами-економістами в аграрних ВУЗах 30

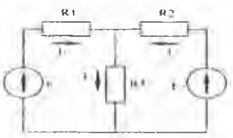
10. ***Карабин О.О.***, канд. ф.-м. н.,***Чмир О.Ю.***, канд. ф.-м. н., ***Меншикова О.В.***, канд. ф.-м. н., Львівськийдержавнийуніверситетбезпекижиттєдіяльності
Про групу Галуа алгебраїчного рівняння 32

11. ***Клюйник І.І.*** ,канд. техн. н.,***Петрович Р.Й.***, канд. ф.-м. н.,Національнийуніверситет "Львівськаполітехніка"
Агрегативно-ітеративніалгоритми для наближеногорозв'язаннярівняннялінійнийрівнянь в банаховомупросторі 36

12. ***Глушик М.М.***,канд.ф.-м.н., доцент, Львівська комерційна академія
Проблеми використання тестової перевірки знаньпри вивченні математичних дисциплін... 38

$$X := \begin{pmatrix} 6.25 \\ 3.75 \\ 2.5 \\ 3.75 \\ 6.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Завдання для самостійної роботи. Використовуючи закони Кірхгофа визначити значення постійних струмів I_1, I_2, I_3 в колі, зображеному на схемі, якщо $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 7$ Ом, $E_1 = 1$ В, $E_2 = 2$ В.



Література

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров.-М.:Наука, 1967.-778 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника+Компьютер+ Mathcad . –М.:Горячая линия-Телеком, 2001. -413 с.
3. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad : математический практикум для экономистов и инженеров – М.:Финансы и статистика, 1999. -656 с.

Псевдообернена матриця та її застосування

Тацій Р. М., Стасюк М. Ф.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Вступ. Для квадратної неособливої матриці A, $(\det A \neq 0)$, як відомо $[1]$, існує обернена матриця A^{-1}. Якщо ж матриця A – прямокутна або $\det A = 0$, то символ A^{-1} не має сенсу. Однак, виявляється, що для довільної матриці A існує «псевдообернена» матриця A^{+}, що володіє деякими властивостями оберенної матриці і має важливі застосування в прикладних задачах.

В запропонованій статті відоме $[1,2]$ поняття «псевдооберненої» матриці застосоване до розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь та до проблеми розв'язальності двоточкових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь.

Визначення псевдобернерої матриці було запропоноване на початку XX ст. американнським математиком та інформатиком Едвардом Муром. Згодом, незалежно від Е. Мура, в дещо іншій формі, псевдооберенна матриця визначалась і досліджувалась англійським математиком Роджером Пенроузом та іншими авторами $[1,2]$.

1. Скелетний розклад матриці.

Означення 1. 1. Зображення $(m \times n)$ – матриці A у вигляді добутку

$$A = B \cdot C \tag{1.1}$$

$(m\times r)$ – матриці B рангу r та $(r\times n)$ – матриці C рангу r називають *скелетним розкладом* матриці A.

Зауважимо, що зображення (1.1) – не єдине, оскільки, наприклад, матрицю B можна визначити за допомогою довільної системи r лінійно незалежних стовпців матриці A.

Зауваження 1.1. Якщо ранг $(m\times n)$ – матриці A дорівнює числу її стовпців, то в скелетному розкладі (1.1) слід покласти $B = A,\quad C = E$, де E – одинична $(n\times n)$– матриця.

Зауваження 1.2. Якщо ранг $(m\times n)$ – матриці A дорівнює числу її рядків, то в скелетному розкладі (1.1) слід покласти $C = A,\quad B = E$, де E – одинична $(m\times m)$– матриця.

Приклад 1.1. Ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$ дорівнює 2, тобто числу її рядків. Тому скелетний розклад цієї матриці має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Приклад 1.2. Ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$ дорівнює 2. Отже скелетний розклад матриці A має зображення

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Приклад 1.3. Побудувати скелетний розклад матриці $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Легко переконатись,що $rangA = 2$ і стовпці $\begin{pmatrix}2&-1&0\end{pmatrix}^T$ та $\begin{pmatrix}-1&1&1\end{pmatrix}^T$ – лінійно незалежні. Тому можна покласти, наприклад,

$$B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Шукатимемо скелетний розклад матриці A у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{132}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{pmatrix},$$

де c_{ij} – невідомі елементи,які визначаються з матричної рівності:

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_{11}-c_{21}&2c_{12}-c_{22}&2c_{13}-c_{23}\\-c_{11}+c_{21}&-c_{12}+c_{22}&-c_{13}+c_{23}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{pmatrix}.$$

Знаходимо: $c_{11}=1,\quad c_{12}=0,\quad c_{13}=1,\quad c_{21}=0,\quad c_{22}=1,\quad c_{23}=2.$ Отже $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ і один із скелетних розкладів матриці A має зображення

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

2. Псевдообернена матриця.

Означення 2.1. $(n \times m)$ – матрицю A^+ називають *псевдооберненою* до $(m \times n)$– матриці A, якщо виконуються такі співвідношення:

$$A \cdot A^+ \cdot A = A, \quad A^+ = U \cdot A^T = A^T \cdot V, \qquad (2.1)$$

де U і V – деякі матриці.

Теорема 2.1. Для довільної $(m \times n)$ – ненульової матриці A існує єдина псевдообернена матриця A^+.

Якщо ранг матриці A співпадає з числом її стовпців, то

$$A^+ = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T. \qquad (2.2)$$

Якщо ранг матриці A співпадає з числом її рядків, то

$$A^+ = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{-1}. \qquad (2.3)$$

В загальному випадку, якщо $A = B \cdot C$ – скелетний розклад матриці A, то

$$A^+ = C^+ \cdot B^+ = C^T\left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \cdot B^T. \qquad (2.4)$$

Наслідок. Якщо A –неособлива квадратна матриця, то $A^+ = A^{-1}$.

Зауваження 2.1. З означення 2.1 випливає, що $A^+ = 0$, як тільки $A = 0$.

Зауваження 2.2. З формули (2.3) випливає, що рівність $A^+ = U \cdot A^T$ виконується при
$U = C^T \cdot \left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \cdot \left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot C,$
а рівність $A^+ = A^T \cdot V$ виконується при
$V = B \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \cdot B^T.$

Зауваження 2.3. Тут розглядаються дійсні матриці, хоча всі результати залишаються справедливими й у комплексному випадку.

Приклад 2.1. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ знайдемо

$$A^+ = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.2. Для матриці $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$ знайдемо

$$A^+=\left(A^T\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T=\left[\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2&-2\\-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2&-2&2\\3&5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2&-0,2&0,2\\0,3&0,5&-0,2\end{pmatrix}.$$

Приклад 2.3. Знайдемо псевдообернену матрицю для матриці A з прикладу 1.3, використавши її скелетний розклад (1.4). Оскільки

$$C\cdot C^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix},\text{ то}$$

$$C^+=C^T\left(C\cdot C^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&2\\1&2\end{pmatrix}.$$

Аналогічно

$$B^T\cdot B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&3\end{pmatrix},$$

$$B^+=\left(B^T\cdot B\right)^{-1}\cdot B^T=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&3\\1&2&5\end{pmatrix}$$

Остаточно за формулою (2.4) отримуємо

$$A^+=C^+\cdot B^+=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&2\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&3\\1&2&5\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}13&-4&5\\-4&4&4\\5&4&13\end{pmatrix}$$

3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом найменших квадратів.

Розглянемо довільну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad(3.1)$$

В загальному випадку система (3.1) може бути й *несумісною.*

Означення 3.1. Вектор $\overline{X}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \end{pmatrix}^T$ називається *найкращим наближеним розв'язком* системи (3.1), якщо при значеннях $x_1 = x_1^0,\quad x_2 = x_2^0 \quad \dots \quad x_n = x_n^0$ квадратичне відхилення

$$\sum_{i=1}^{m} \left| b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|^2 \tag{3.2}$$

досягає свого найменшого значення і серед стовпців $\overline{X}^0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$, для яких це відхилення набуває найменшого значення, стовпець $\overline{X}^0$ має мінімальну довжину, тобто величина

$$\left|\overline{X}\right|^2 = \overline{X}^T \cdot \overline{X} = \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|^2 \tag{3.3}$$

набуває на векторі $\overline{X}^0$ найменшого значення.

Зауваження 3.1. Система (3.1) може бути записана в еквівалентній матричній формі:

$$A \cdot \overline{X} = \overline{b}, \tag{3.4}$$

де

$A = \left(a_{ij}\right),\quad i = 1, 2, \dots, m,\quad j = 1, 2, \dots, n,\quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T.$

Означення 3.2. Вектор $\overline{X}^0$, як найкращий наближений розв'язок системи (3.1), називатимемо *нормальним псевдорозв'язком* цієї системи.

Виявляється, що справедлива

Теорема 3.1. Нормальний псевдорозв'язок системи (3.4) має вигляд

$$\overline{X}^0 = A^+ \cdot \overline{b}. \tag{3.5}$$

Приклад 3.1. Знайти нормальний псевдорозв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_4 = -4, \\ x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ цієї системи, як легко перевірити, псевдообернена матриця має вигляд

$$A^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За формулою (3.5) знаходимо нормальний псевдорозв'язок

$$\overline{X}^0 = A^+ \cdot \overline{b} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Розв'язальність крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь.**

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\bar{Y}' = A(x)\bar{Y} + \bar{F}(x), \quad x \in [a,b], \qquad (4.1),$$

де $\bar{Y}(x)$ – n-вимірна вектор-функція, елементи матриці $A(x)$ і координати n-вимірного вектора $\bar{F}(x)$ для спрощення вважатимемо неперервними на інтервалі $[a,b]$ функціями.

Розглянемо оператор

$L\bar{Y} \equiv P\bar{Y}(a) + Q\bar{Y}(b),$

де P і Q – квадратні числові $(n \times n)$-матриці. До системи (4.1) додамо умови

$$L\bar{Y} = \bar{\Gamma}, \qquad (4.2)$$

де $\bar{\Gamma}$ – відомий (числовий) n-вимірний вектор.

Загальний розв'язок системи (4.1), як відомо, має вигляд

$$\bar{Y}(x) = B(x,a)\cdot\bar{C} + \bar{Y}^*(x), \qquad (4.3)$$

де $B(x,s)$ – матриця Коші відповідної однорідної системи $\bar{Y}' = A(x)\cdot\bar{Y}$; C – довільний сталий вектор; $\bar{Y}^*(x) = \int_a^x B(x,s)\cdot\bar{F}(s)ds; \quad x \in [a,b].$

Покладемо

$L_B = P + QB(b,a).$

Нехай L_B^+ – псевдообернена матриця для L_B. Нагадаємо, що коли $\det L_B \neq 0$, то $L_B^+ = L_B^{-1}$.

Теорема 4.1. Розв'язок задачі $(4.1),(4,2)$ існує тоді і тільки тоді, коли

$$\left(E - L_B \cdot L_B^+\right)\left(\Gamma - L\bar{Y}^*\right) = 0. \qquad (4.4)$$

Якщо ця умова виконується, то для єдності розв'язку необхідно і досить виконання умови $L_B^+ = L_B^{-1}$.

Література

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.
2. Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.В.Шевцов – Москва: Финансы и статистика, 2003. – 570 с.

Розв'язування деяких видів систем алгебраїчних рівнянь як засіб пропедевтики поняття рекурсії

Гроза В. А., Томащук О. П., Бохонова Т. Ю.,
Національний авіаційний університет
Лещинський О. Л., Тихонова В. В.,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету

У вищих навчальних закладах актуальною є проблема професійної спрямованості дисциплін, які є непрофільними для студентів певної спеціальності. Характерним аспектом професійної спрямованості викладання непрофільних дисциплін є пропедевтика (або навіть формування) у студентів понять, що є важливими для їхньої майбутньої професії. Для май-