

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 74

2011

**V I S N Y K
OF THE LVIV
UNIVERSITY**

**Series
Mechanics and Mathematics**

Issue 74

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

**Ivan Franko National
University of Lviv**

**В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ**

**Серія
механіко-математична**

Випуск 74

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

**Львівський національний
університет імені Івана Франка**

2011

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка	Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.
---	---

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Р е д а к ц і й н а к о л е г і я :

д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (головний редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заступник головного редактора); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Бугрій* (відповідальний секретар); д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванчов*; д-р фіз.-мат. наук, доц. *В. Кирилич*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Питула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета*.

Professor *M. Zarichny* – Editor-in-chief,
Professor *M. Komarnitskyi* – Associate editor,
Associate professor *O. Buhrii* – Executive secretary.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

Адреса редколегії: Львівський національний університет імені Івана Франка, механіко-математичний факультет, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна тел. (0322) 74-11-07 ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp	Editorial office address: Ivan Franko National University of Lviv, Mechanical and Mathematical department, Universytets'ka Str. 1, UA-79000 Lviv, Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07 e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp
--	---

Редактор Н. ПЛИСА
Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої
справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції. Серія ДК N 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 16,8
Наклад 200 прим. Зам.

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2011

ЗМІСТ

<i>Болдовська Ольга</i> . Існування розв'язку задачі Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з абсорбцією в необмеженій області з нульовим загостренням	5
<i>Братійчук Микола, Жерновий Юрій</i> . Стаціонарні характеристики систем $M^\theta/G/1/m$ та $M^\theta/G/1$ з пороговим блокуванням вхідного потоку	11
<i>Бугрій Микола</i> . Про одну задачу оптимізації фондового портфеля акцій та опціонів європейського стилю	26
<i>Васильків Ярослав, Політило Любомир</i> . Інтегральні середні функцій, спряжених до субгармонійних функцій. II	34
<i>Гаджиев Таір, Мамедова Кенюль</i> . Про поведінку розв'язків вироджених параболічних рівнянь вищих порядків	41
<i>Гаталевич Андрій</i> . Доповнення рядка над комутативним кільцем Безу до матриці з визначником, який дорівнює найбільшому спільному дільнику елементів рядка	47
<i>Гнатюк Оксана, Кондратюк Андрій, Куд'явіна Юлія</i> . Класифікація ізольованих особливих точок субгармонійних функцій	52
<i>Гуран Ігор, Гутік Олег, Равський Олександр, Чучман Іван</i> . Симетричні топологічні групи та підгрупи	61
<i>Єлейко Ярослав, Базилевич Ірина, Тимків Галина</i> . Гранична теорема для гіллястого процесу з довільною кількістю типів частинок та імміграцією	74
<i>Єлейко Ярослав, Лазарів Тарас, Мазур Степан</i> . Багатофрактальні добутки дифузійних процесів: рандомізований випадок	83
<i>Заболоцький Микола, Дейнека Ігор</i> . Властивість монотонності стосовно нулів та полюсів неванлієвої характеристики мероморфних функцій	89
<i>Івасишен Степан, Івасюк Галина</i> . Параболічні початкові задачі Солонникова-Ейдельмана	98
<i>Кіндибалоук Аркадій, Притула Микола</i> . Вігамільтоновість і точні розв'язки узагальненої динамічної системи типу Бюргерса	109
<i>Косаревич Катерина</i> . Деякі аспекти аналізу кількісної конкуренції з випадковою стратегією однієї фірми	122
<i>Лопушанська Галина</i> . Узагальнені початкові та крайові значення розв'язків параболічної системи рівнянь	129
<i>Магола Ярослав</i> . Про цілі розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами	143
<i>Охрін Остап</i> . Про твірний функціонал часткового випадку S -зупинених гіллястих процесів	157
<i>Савіцька Тетяна</i> . Обернена задача для параболічного рівняння в області зі слабким виродженням межі	168
<i>Савченко Олександр</i> . Про розмитий гіперпростір Громова-Гаусдорфа одиничного відрізка	185
<i>Чмир Оксана</i> . Характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності	191

CONTENT

<i>Boldovs'ka Ol'ha</i> . Existence of the solution to Neumann problem for quasilinear parabolic absorption equation in unbounded domain with zero sharpening	5
<i>Bratiichuk Mykola, Zhernovyi Yuriy</i> . Stationary characteristics of $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queues with threshold blocking of an input flow	11
<i>Bugriy Mykola</i> . On some optimization problem of the stock portfolio covered by options of european style	26
<i>Vasytkiv Yaroslav, Politylo Lyubomyr</i> . Integral means of functions conjugate to subharmonic functions. II	34
<i>Gadjiev Tahir, Mamedova Kenyul</i> . On behavior of solutions of higher order degenerate parabolic equations	41
<i>Gatalevych Andriy</i> . Completing row over commutative Bezout ring to matrix determinant of which one of the most common divisor of all elements of this row	47
<i>Gnatiuk Oksana, Kondratyuk Andriy, Kudjavina Julia</i> . Classification of isolated singularities of subharmonic functions	52
<i>Guran Igor, Gutik Oleg, Ravsky Oleksandr, Chuchman Ivan</i> . Symmetric topological groups and semigroups	61
<i>Yeleyko Yaroslav, Bazylevych Iryna, Tymkiv Galyna</i> . Limit theorem for branching process with an arbitrary number of types of particles and immigration	74
<i>Yeleyko Yaroslav, Lazariu Taras, Mazur Stepan</i> . Multifractal products of diffusion processes and randomized scenario	83
<i>Zabolotsky Mykola, Deyneka Ihor</i> . Property of monotonicity with respect to zeros and poles of Nevanlinna characteristic of meromorphic functions	89
<i>Ivasyshen Stepan, Ivasyuk Halyna</i> . Parabolic initial problems of Solonnikov-Eidelman	98
<i>Kindybaluk Arkady, Prytula Mykola</i> . Bihamiltonity and exact solutions of Burger's type generalized dynamical system	109
<i>Kosarevych Kateryna</i> . Some aspects of competitive quantitative analysis with random strategy of one firm	122
<i>Lopushanska Halyna</i> . Generalized initial and boundary values of the solutions of the parabolic system equations	129
<i>Mahola Yaroslav</i> . On entire solutions of linear differential equations with polynomial coefficients	143
<i>Okhrin Ostap</i> . On the generating functional of the special case of S -stopped branching processes	157
<i>Savitska Tetiana</i> . An inverse problem for a parabolic equation in the domain with a weakly degenerate boundary	168
<i>Savchenko Aleksandr</i> . On fuzzy Gromov-Hausdorff hyperspace of the unit segment	185
<i>Chmyr Oksana</i> . Character pointed power singularities of the solution of the nonlinear first generalized boundary value problem for heat equation	191

УДК 517.95

ХАРАКТЕР ТОЧКОВИХ СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ ПЕРШОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Оксана ЧМИР

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Використовуючи принцип Шаудера, досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Ключові слова: нелінійна крайова задача; узагальнена функція; ваговий функційний простір; неперервний оператор; компактна множина; теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. Існує багато праць, автори яких досліджували узагальнені крайові задачі для лінійних і напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь (див., наприклад, [1] та бібліографію, а також [2], [3]). У статтях [4, 5, 6, 7] досліджували крайові задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами, а у [8] – нелінійні еліптичні крайові задачі при заданих на межі функціях із сильними степеневими особливостями. Використовуючи дані цих досліджень, продовжено дослідження [9] нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях.

Ми вивчаємо характер степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

2. Основна частина.

2.1. Основні позначення та формулювання задачі. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в \mathbb{R}^n з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞ , $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \text{ – евклідова відстань в } \mathbb{R}^n, P = (x, t), M = (y, \tau), \hat{P} = (\hat{x}, \hat{t}),$$

$$d(P, M) = |PM| = d(x, t; y, \tau) = \sqrt{\|x - y\|^2 + |t - \tau|} \text{ – параболічна відстань в } \mathbb{R}^{n+1};$$

η – мультиіндекс з компонентами (η_1, \dots, η_n) , $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, n}$, $|\eta| = \eta_1 + \dots + \eta_n$ – довжина мультиіндексу η , $D^\eta \equiv D_x^\eta = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \dots \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ – таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \leq 1$. Через $\tilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід’ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma \rightarrow 0$. При довільній фіксованій точці $\hat{P} \in \overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P \in \overline{Q}$ таку, що $0 < \varrho_0(P, \hat{P}) \leq 1$ та

$$\varrho_0(P, \hat{P}) = \begin{cases} \tilde{\varrho}(|P\hat{P}|), & |P\hat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\hat{P}| \geq \varepsilon_0. \end{cases}$$

Нехай $D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
 $D^0(\overline{Q}) = \{\varphi \in D(\overline{Q}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots\}$,
 $D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots\}$,
 $D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S .

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Нехай $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$. Припустимо, що:

- 1) функції $f_0(x, t, v)$, $f_1(x, t, v)$ визначені відповідно в $Q \times \mathbb{R}$, $\Sigma \times \mathbb{R}$;
- 2) $F_1(x, t) = \sum_{|l| \leq p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x - \hat{x}) \delta^{(m)}(t - \hat{t})$,

$$F_2(x) = \sum_{|r| \leq p_3} C_r D_x^r \delta(x - \hat{x}),$$

де C_{lm} , C_r – сталі; p_1, p_2, p_3 – невід’ємні цілі числа.

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$Lu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = f_0(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in Q, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_\Sigma = F_1(x, t) + f_1(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = F_2(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

При $k \in \mathbb{R}$ введемо функційні простори:

$$\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P}) = \{v : \|v; \hat{P}\|_k = \max\left\{ \int_Q \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) |v(x, t)| dx dt; \int_\Sigma \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) |v(x, t)| dS dt \right\} < +\infty\},$$

$$X_k(\overline{Q}, \hat{P}) = \{\psi \in D^0(\overline{Q}) : \psi(\cdot, 0) \in D_0(\overline{\Omega}), \psi|_{\overline{\Sigma}} = 0, L^* \psi(x, t) = O(\varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t})), \varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \rightarrow 0\},$$

де L^* – оператор, формально спряжений до L , $L^*v = -(\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^* v)$.

Означення 1. Розв’язком задачі (2)-(4) називається функція $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$ така, що

$$\int_Q L^* \psi \cdot u dx dt = \int_Q \psi(x, t) \cdot f_0(x, t, u(x, t)) dx dt + \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \nu}, F_1(x, t) \right)_1 +$$

$$+ \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \nu} \cdot f_1(x, t, u(x, t)) dS dt + (\psi(\cdot, 0), F_2(\cdot))_2 \quad \text{для довільної } \psi \in X_k(\overline{Q}, \hat{P}).$$

Позначимо через $G(x, t, y, \tau)$ функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена в точках $(x, t; y, \tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ при $(x, t) \neq (y, \tau)$. Існування її та багато властивостей одержуємо з [10, 11]. З цих результатів випливає, що:

- 1) $G(x, t; y, \tau) = 0$ при $t < \tau$;
- 2) для будь-яких мультиіндексів η, η_0

$$\left| \frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}} D_x^{\eta} G(x, t; y, \tau) \right| \leq \hat{C}_{\eta, \eta_0} [d(x, t; y, \tau)]^{-n-|\eta|-2\eta_0},$$

де \hat{C}_{η, η_0} – додатні сталі.

Подібно до результатів [2, 12] доведено таку властивість функції G .

Лема 1. Нехай $(\hat{x}, \hat{t}) \in \overline{Q}$, $|\eta| \leq 1$. Тоді при $r > -n - 2$

$$\int_{\overline{Q}} \varrho_0^r(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) |D_x^{\eta} G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \hat{L}_{1, \eta} \max\{[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{r+2-|\eta|}, 1\} \quad \forall (x, t) \in \overline{Q},$$

а при $r > -n - 1$

$$\int_{\Sigma} \varrho_0^r(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) |D_x^{\eta} G(x, t; y, \tau)| dS_y d\tau \leq \hat{L}_{2, \eta} \max\{[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{r+1-|\eta|}, 1\} \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}.$$

Зауваження 1. Подібно до доведення теореми 2 [3] доводимо, що розв'язок задачі (2)-(4) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$ інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) \cdot f_0(y, \tau, u(y, \tau)) dy + \left(\frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y, \tau) \right)_1 + \\ & + \int_{\Sigma} \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \cdot f_1(y, \tau, u(y, \tau)) dS_y d\tau + (G(x, t; y, 0), F_2(y))_2, \end{aligned} \quad (5)$$

і навпаки.

Позначимо

$$\begin{aligned} (Hv)(x, t) = & \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) \cdot f_0(y, \tau, v(y, \tau)) dy + \\ & + \int_{\Sigma} \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \cdot f_1(y, \tau, v(y, \tau)) dS_y d\tau, \end{aligned}$$

$$h(x, t) = g_1(x, t) + g_2(x, t) = \left(\frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y, \tau) \right)_1 + (G(x, t; y, 0), F_2(y))_2,$$

$$(H_1 v)(x, t) = (Hv)(x, t) + h(x, t).$$

Рівняння (5) набуде вигляду $u(x, t) = (Hu)(x, t) + h(x, t)$.

У [9] отримано існування розв'язку задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$. Зокрема, при $k > k_0 = \max\{p_1 + 2p_2, p_3 - 1\}$, $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0}$ та $f_1(x, t, v) = |v|^{\beta_1}$, де $\beta_0 \in (0, \frac{n+2}{k+n+2})$, $\beta_1 \in (0, \frac{n+1}{k+n+1})$, існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$. Якщо β_0, β_1 відомі, то також отримано простори $\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$, для яких існує розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$ задачі (2)-(4).

2.2. Характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Для довільної фіксованої точки $\hat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P}) = \{v \in C(\overline{Q} \setminus \{\hat{P}\}) : \varrho_0^{-\alpha}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})v(y, \tau) \in C(\overline{Q}) \\ (\|v; \hat{P}\|'_\alpha = \sup_{(y, \tau) \in \overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})|v(y, \tau)| < +\infty)\}.$$

Оскільки при $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P})$ та $k + \alpha > -n - 1$ виконується

$$\|v; \hat{P}\|_k = \max\left\{\int_Q \varrho_0^k(M, \hat{P})|v(y, \tau)| dy d\tau; \int_\Sigma \varrho_0^k(M, \hat{P})|v(y, \tau)| dS d\tau\right\} \leq \\ \leq \max\left\{\hat{C} \int_Q \varrho_0^k(M, \hat{P})[\varrho_0(M, \hat{P})]^\alpha dy d\tau; \hat{C} \int_\Sigma \varrho_0^k(M, \hat{P})[\varrho_0(M, \hat{P})]^\alpha dS d\tau\right\} \leq \\ \leq \max\left\{\hat{C} \int_{\{M: |M\hat{P}| < \varepsilon_0\}} [\varrho_0(M, \hat{P})]^{k+\alpha} dy d\tau + \hat{C} \int_{\{M: |M\hat{P}| \geq \varepsilon_0\}} dy d\tau; \right. \\ \left. \hat{C} \int_{\{M: |M\hat{P}| < \varepsilon_0\}} [\varrho_0(M, \hat{P})]^{k+\alpha} dS d\tau + \hat{C} \int_{\{M: |M\hat{P}| \geq \varepsilon_0\}} dS d\tau\right\} < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P}) \subset \mathcal{M}_k(\overline{Q}, \hat{P})$ при $k > -\alpha - n - 1$, де \hat{C} – додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \hat{C}}(\overline{Q}, \hat{P}) = \{v \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P}) : \|v; \hat{P}\|'_\alpha \leq \hat{C}\}$ – замкнена куля радіуса \hat{C} у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P})$.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення (1) та $\alpha \leq \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\} - n$. Тоді $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P})$, а саме, існує додатна стала \hat{K}_0 така, що $\|h; \hat{P}\|'_\alpha \leq \hat{K}_0 < +\infty$.*

Доведення. Проводячи подібні міркування, як при доведенні леми 3 із [9], одержуємо

$$|g_1(x, t)| \leq K_1[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2)} = K_1[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2+\alpha)} \times \\ \times [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^\alpha \leq \hat{K}_0[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^\alpha$$

при $\alpha \leq -(n+1+p_1+2p_2)$;

$$|g_2(x, t)| \leq K_2[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-(n+p_3)} \leq \hat{K}_0[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^\alpha$$

при $\alpha \leq -(n+p_3)$, де K_1, K_2 – додатні сталі. \square

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = |u(x, t)|^{\beta_0}, \quad (x, t) \in Q, \quad (6)$$

$$u|_\Sigma = F_1(x, t) + |u(x, t)|^{\beta_1}, \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (7)$$

$$u|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega \quad (8)$$

при $\beta_0, \beta_1 \in (0, 1)$.

Лема 3. Якщо $\beta_0, \beta_1 \in (0, 1)$,

$$\max \left\{ -\frac{n+2}{\beta_0}; -\frac{n+1}{\beta_1} \right\} < \alpha \leq \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\} - n,$$

то існує стала $\tilde{K}_0 > 0$ така, що при всіх $\tilde{C} > \tilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\tilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\tilde{Q}, \hat{P})$ в себе.

Доведення. При $v \in \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\tilde{Q}, \hat{P})$, де \tilde{C} – довільна додатна стала, розглянемо

$$\begin{aligned} \|H_1 v; \hat{P}\|'_\alpha \leq & \sup_{(x,t) \in \tilde{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \left(\int_0^t d\tau \int_\Omega |G(x, t; y, \tau)| \cdot |v(y, \tau)|^{\beta_0} dy + \right. \\ & \left. + \int_\Sigma \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| \cdot |v(y, \tau)|^{\beta_1} dS_y d\tau \right) + \|h; \hat{P}\|'_\alpha. \end{aligned}$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n - 2$, $\alpha\beta_1 > -n - 1$ і лему 2 при $\alpha \leq \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\} - n$, одержимо

$$\begin{aligned} \|H_1 v; \hat{P}\|'_\alpha \leq & \hat{L}_{1,0} \tilde{C}^{\beta_0} \sup_{(x,t) \in \tilde{Q}} \{ \max\{[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha(\beta_0-1)+2}, [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha}\} \} + \\ & + \hat{L}_{2,1} \tilde{C}^{\beta_1} \sup_{(x,t) \in \tilde{Q}} \{ \max\{[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha(\beta_1-1)}, [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha}\} \} + \hat{K}_0. \end{aligned}$$

Якщо виконуються умови

$$\begin{cases} \alpha\beta_0 > -n - 2, \\ \alpha\beta_1 > -n - 1, \\ \alpha(\beta_0 - 1) + 2 \geq 0, \\ \alpha(\beta_1 - 1) \geq 0, \\ -\alpha \geq 0, \end{cases}$$

то знаходимо $\|H_1 v; \hat{P}\|'_\alpha \leq \tilde{C}'$ при $v \in \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\tilde{Q}, \hat{P})$, де $\tilde{C}' = \hat{L}_{1,0} \tilde{C}^{\beta_0} + \hat{L}_{2,1} \tilde{C}^{\beta_1} + \hat{K}_0$.

Зауважимо, що при $\beta_0, \beta_1 \in (0, 1)$ існує стала $\tilde{K}_0 > 0$ така, що $\tilde{C}' \leq \tilde{C}$ при $\tilde{C} > \tilde{K}_0$. Отже, за умов леми одержуємо існування додатної сталої \tilde{K}_0 такої, що при всіх $\tilde{C} > \tilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\tilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\tilde{Q}, \hat{P})$ в себе. \square

Лема 4. Нехай $\beta_0, \beta_1 \in (0, 1)$, $\max\{-\frac{2}{\beta_0}; -\frac{n+1}{\beta_1}\} < \alpha \leq 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$, міра якої $m(V)$ менша за σ , для довільних $(x, t) \in \tilde{Q}$ виконується

$$[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap Q} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_0} \cdot |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \varepsilon, \quad (9)$$

$$[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \Sigma} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau < \varepsilon. \quad (10)$$

Доведення. Доведення (9) проведено у лемі 1 [13] і виконується при $\alpha\beta_0 + 2 > 0$. Доведення (10) проводимо подібно як і доведення (9), розділяючи особливості функції $\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}$. Нехай V – довільна підобласть в Q , (\hat{x}, \hat{t}) – фіксована точка Σ , $\sigma \in (0, 1)$ – яке-небудь число. Далі позначатимемо через C_j , $j = \overline{1, 13}$ – додатні сталі.

1. Нехай точка $(x, t) \in \overline{Q}$ така, що $\|x - \hat{x}\| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t - \hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$, тобто $|P\hat{P}| < \sigma$.

а) Якщо $\|y - \hat{x}\| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau - \hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$ ($|M\hat{P}| < \sigma$), то $\|x - y\| \leq \|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{x}\| < \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t - \tau| < \sigma^2$, тобто $|MP| < \sqrt{3}\sigma$, а тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &= \\ &= [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |M\hat{P}| < \sigma\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \\ &\leq [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{\substack{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| < \frac{\sigma}{2}; \\ \frac{\sigma}{2} \leq |M\hat{P}| < \sigma\}}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau + \\ &+ [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{\substack{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}; \\ |M\hat{P}| < \frac{\sigma}{2}\}}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau + \\ &+ [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{\substack{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}; \\ \frac{\sigma}{2} \leq |M\hat{P}| < \sigma\}}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau = \\ &= J_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) + J_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) + J_3(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma). \end{aligned} \quad (11)$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі J_1

$$\begin{aligned} y_i &= \hat{x}_i + \xi_i \sigma, & x_i &= \hat{x}_i + s_i \sigma, & i &= \overline{1, n}. \\ \tau &= \hat{t} + \xi_{n+1} \sigma^2; & t &= \hat{t} + s_{n+1} \sigma^2, \end{aligned} \quad (12)$$

У нових змінних

$$M = \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}), \quad |\bar{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + |\xi_{n+1}|} = \sqrt{|\xi|^2 + |\xi_{n+1}|},$$

$$|M\hat{P}| = \sqrt{\|y - \hat{x}\|^2 + |\tau - \hat{t}|} = \sqrt{\sigma^2 |\xi|^2 + \sigma^2 |\xi_{n+1}|} = \sigma \cdot |\bar{\xi}|,$$

$$|MP| = \sqrt{\|y - x\|^2 + |\tau - t|} = \sqrt{\sigma^2 \|s - \xi\|^2 + \sigma^2 |s_{n+1} - \xi_{n+1}|} = \sigma \cdot d(\bar{s}; \bar{\xi}),$$

де

$$d(\bar{s}; \bar{\xi}) = \sqrt{\|s - \xi\|^2 + |s_{n+1} - \xi_{n+1}|}, \quad dS_y d\tau = \sigma^{n+1} dS_\xi d\xi_{n+1}.$$

Використовуючи гладкість поверхні Σ , відомо, що $\left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| \leq \hat{C}_{1,0} |MP|^{-n-1+\gamma}$, де $\gamma \in (0, 1)$. Тоді

$$J_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) = [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{\substack{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| < \frac{\sigma}{2}; \\ \frac{\sigma}{2} \leq |M\hat{P}| < \sigma\}}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq$$

$$\leq C_1 [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1} \cdot \sigma^\gamma \int_{V \cap \{\bar{\xi}: d(\bar{s}; \bar{\xi}) < \frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\bar{s}; \bar{\xi}) dS_\xi d\xi_{n+1} \leq C_2 \sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma},$$

де збіжність інтеграла впливає з формули 3 [14, с. 588].

Проводячи подібну заміну змінних (12) в інтегралі J_2 , одержуємо

$$\begin{aligned} J_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &= \\ &= [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}; \\ &\quad |M\hat{P}| < \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \\ &\leq C_3 [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1} \int_{V \cap \{\bar{\xi}: |\bar{\xi}| < \frac{1}{2}\}} |\bar{\xi}|^{\alpha\beta_1} dS_\xi d\xi_{n+1} \leq C_4 \cdot \sigma^{\alpha(\beta_1-1)}. \end{aligned}$$

Тут збіжність інтеграла впливає з формули 3 [14, с. 588] при $\alpha\beta_1 > -n - 1$.

$$\begin{aligned} J_3(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &= [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}; \\ &\quad \frac{\sigma}{2} \leq |M\hat{P}| < \sigma\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \\ &\leq C_5 \sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1} m(V). \end{aligned}$$

Отже, при $m(V) < \sigma^{n+1}$ із (11) та вище описаних міркувань, одержуємо

$$\mathcal{I}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) \leq C_6 (\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma} + \sigma^{\alpha(\beta_1-1)} + \sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1} m(V)) \leq C_7 \sigma^{\alpha(\beta_1-1)}.$$

Оскільки $\alpha(\beta_1 - 1) > 0$ при $\alpha < 0$ та $\beta_1 < 1$, то за заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\right\}$, при $(x, t) \in \bar{Q}$ такій, що $|P\hat{P}| < \sigma$ та $m(V) < \sigma^{n+1}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

б) Якщо $|M\hat{P}| \geq \sigma$, то подібно знаходимо

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &= \\ &= [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |M\hat{P}| \geq \sigma\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \\ &\leq [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |M\hat{P}| \geq \sigma; \\ &\quad |MP| < \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau + \\ &+ [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |M\hat{P}| \geq \sigma; \\ &\quad |MP| \geq \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \\ &\leq C_8 (\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma} + \sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1} m(V)) \leq C_9 \sigma^{\alpha(\beta_1-1)} \quad \text{при } m(V) < \sigma^{n+1}. \end{aligned}$$

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\right\}$, при $(x, t) \in \overline{Q}$ такої, що $|P\hat{P}| < \sigma$ та $m(V) < \sigma^{n+1}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma < \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; \left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\right\}$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+1}$

$$\mathcal{I}(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) = \mathcal{I}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) + \mathcal{I}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}, \quad |P\hat{P}| < \sigma.$$

2. При $(x, t) \in \overline{Q}$ такої, що $|P\hat{P}| \geq \sigma$, розглянемо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &= \\ &= [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| < \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau + \\ &+ [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau = \\ &= \mathcal{J}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) + \mathcal{J}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma). \end{aligned} \quad (13)$$

При $|P\hat{P}| \geq \sigma$ та $\|x - y\| < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|t - \tau| < \frac{\sigma^2}{8}$ ($|MP| < \frac{\sigma}{2}$) виконується $\|y - \hat{x}\| \geq \|x - \hat{x}\| - \|x - y\| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|\tau - \hat{t}| \geq |t - \hat{t}| - |t - \tau| > \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{8} = \frac{3\sigma^2}{8}$, тобто $|M\hat{P}| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Тоді, використовуючи заміну змінних (12),

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &\leq C_{10} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1} \int_{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| < \frac{\sigma}{2}\}} |MP|^{-n-1+\gamma} dS_y d\tau \leq \\ &\leq C_{10} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1+\gamma} \int_{V \cap \{\bar{\xi}: d(\bar{s}; \bar{\xi}) < \frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\bar{s}; \bar{\xi}) dS_{\bar{\xi}} d\xi_{n+1}; \\ \mathcal{J}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) &\leq C_{11} \cdot \sigma^{-n-1} \left(\int_{\substack{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}; \\ |M\hat{P}| < \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} dS_y d\tau + \right. \\ &\left. + \int_{\substack{V \cap \{(y, \tau) \in \Sigma: |MP| \geq \frac{\sigma}{2}; \\ |M\hat{P}| \geq \frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y, \tau, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha\beta_1} dS_y d\tau \right) \leq \\ &\leq C_{12} \sigma^{-n-1} \left(\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} \int_{V \cap \{\bar{\xi}: |\bar{\xi}| < \frac{1}{2}\}} |\bar{\xi}|^{\alpha\beta_1} dS_{\bar{\xi}} d\xi_{n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} \int_{V \cap \{\bar{\xi}: |\bar{\xi}| \geq \frac{1}{2}\}} \sigma^{n+1} dS_{\bar{\xi}} d\xi_{n+1} \right) \leq \\ &\leq C_{12} \left(\sigma^{\alpha\beta_1} \int_{V \cap \{\bar{\xi}: |\bar{\xi}| < \frac{1}{2}\}} |\bar{\xi}|^{\alpha\beta_1} dS_{\bar{\xi}} d\xi_{n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} m(V) \right). \end{aligned}$$

З теореми 5 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега) [15, с. 301] випливає, що для довільного $\eta > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\int_{V \cap \{\bar{\xi}: d(\bar{s}; \bar{\xi}) < \frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\bar{s}; \bar{\xi}) dS_{\xi} d\xi_{n+1} < \eta \quad \text{при} \quad m(V) < \delta;$$

$$\int_{V \cap \{\bar{\xi}: |\bar{\xi}| < \frac{1}{2}\}} |\bar{\xi}|^{\alpha\beta_1} dS_{\xi} d\xi_{n+1} < \eta \quad \text{при} \quad m(V) < \delta.$$

Вибираючи $\eta < \sigma^{n+1}$, одержуємо

$$\mathcal{J}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) \leq C_{10} \sigma^{\alpha\beta_1+n+1+\gamma};$$

$$\mathcal{J}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) \leq C_{12}(\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} m(V)) \leq C_{13} \sigma^{\alpha\beta_1+n+1} \quad \text{при} \quad m(V) < \delta < \sigma^{n+1}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$$\sigma < \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{C_{10}}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta_1+n+1+\gamma}}; \left(\frac{\varepsilon}{C_{13}}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta_1+n+1}}; 1\right\}$$

таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+1}$

$$\mathcal{J}(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) = \mathcal{J}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) + \mathcal{J}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}, \sigma) < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}, \quad |P\hat{P}| \geq \sigma.$$

□

Теорема 1. Нехай $\beta_0, \beta_1 \in (0, 1)$,

$$\max\left\{-\frac{2}{\beta_0}; -\frac{n+1}{\beta_1}\right\} < \alpha \leq \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\} - n.$$

Тоді існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\bar{Q}, \hat{P})$ крайової задачі (6)-(8) і при $k > -\alpha - n - 1$ цей розв'язок належить простору $\mathcal{M}_k(\bar{Q}, \hat{P})$.

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З доведення леми 3 випливає, що H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})$ в себе.

Покажемо, що H_1 – цілком неперервний оператор у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})$.

При $v, w \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})$

$$\begin{aligned} \|H_1 v - H_1 w; \hat{P}\|_{\alpha} &\leq \sup_{(x,t) \in \bar{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \cdot \|v(y, \tau)\|^{\beta_0} - \\ &- \|w(y, \tau)\|^{\beta_0} dy + \sup_{(x,t) \in \bar{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| \cdot \|v(y, \tau)\|^{\beta_1} - \|w(y, \tau)\|^{\beta_1} dS_y d\tau. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу $|a^{\mu} - b^{\mu}| \leq |a - b|^{\mu}$ при $a, b > 0, \mu \in (0, 1)$, матимемо

$$\int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \cdot \|v(y, \tau)\|^{\beta_0} - \|w(y, \tau)\|^{\beta_0} dy \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |G(x, t; y, \tau)| \cdot \left(\sup_{(y, \tau) \in \bar{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |v(y, \tau) - w(y, \tau)| \right)^{\beta_0} dy \leq \\
&\leq (\|v - w; \hat{P}\|_{\alpha}')^{\beta_0} \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |G(x, t; y, \tau)| dy; \\
&\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| \cdot \|v(y, \tau)\|^{\beta_1} - |w(y, \tau)|^{\beta_1} dS_y d\tau \leq \\
&\leq \int_{\Sigma} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| \cdot \left(\sup_{(y, \tau) \in \bar{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |v(y, \tau) - w(y, \tau)| \right)^{\beta_1} dS_y d\tau \leq \\
&\leq (\|v - w; \hat{P}\|_{\alpha}')^{\beta_1} \int_{\Sigma} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau.
\end{aligned}$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n - 2$, $\alpha\beta_1 > -n - 1$, одержуємо

$$\begin{aligned}
&\|H_1 v - H_1 w; \hat{P}\|_{\alpha}' \leq \\
&\leq \hat{L}_{1,0} (\|v - w; \hat{P}\|_{\alpha}')^{\beta_0} \sup_{(x,t) \in \bar{Q}} \{ \max\{[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha(\beta_0-1)+2}, [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha}\} \} + \\
&+ \hat{L}_{2,1} (\|v - w; \hat{P}\|_{\alpha}')^{\beta_1} \sup_{(x,t) \in \bar{Q}} \{ \max\{[\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{\alpha(\beta_1-1)}, [\varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})]^{-\alpha}\} \}.
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи умови на α , випливає, що H_1 – неперервний оператор в $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})$.

Покажемо компактність оператора H_1 на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})$. З доведення лему 3 випливає, що множина $\{\varrho_0^{-\alpha} H_1 v : v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})\}$ – рівномірно обмежена. Доведемо, що ця множина одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільних $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\bar{Q}, \hat{P})$

$$\begin{aligned}
&\sup_{(x,t) \in \bar{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (H_1 v)(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (H_1 v)(x, t)| \leq \\
&\leq \sup_{(x,t) \in \bar{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (Hv)(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (Hv)(x, t)| + \\
&+ \sup_{(x,t) \in \bar{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x, t)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Вважаємо

$$\begin{aligned}
&\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) = 0, \quad \varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) G(x+z, t+z_0; y, \tau) = 0, \\
&\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} = 0, \\
&\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) (Hv)(x+z, t+z_0) = 0, \\
&\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) h(x+z, t+z_0) = 0,
\end{aligned}$$

якщо $(x+z, t+z_0) \notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки за лемою 2 $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \hat{P})$, то $\varrho_0^{-\alpha} h \in C(\overline{Q})$. Тому існує $\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \hat{\delta}_1$, $|z_0| < \hat{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x, t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x, t) \in \overline{Q}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) &= |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (Hv)(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (Hv)(x, t)| \leq \\ &\leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot G(x+z, t+z_0; y, \tau) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot G(x, t; y, \tau)| \times \\ &\times |v(y, \tau)|^{\beta_0} dy + \varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \int_t^{t+z_0} d\tau \int_{\Omega} |G(x+z, t+z_0; y, \tau)| \cdot |v(y, \tau)|^{\beta_0} dy + \\ &+ \int_{\Sigma} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| \times \\ &\times |v(y, \tau)|^{\beta_1} dS_y d\tau = \mathcal{I}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_3(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0). \end{aligned}$$

З доведення теореми 1 [13] випливає існування $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \tilde{\delta}_1$, $|z_0| < \tilde{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q}} (\mathcal{I}_1(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_2(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай $\eta_1 > 0$ – досить мале і довільне число, $\Sigma_{\eta_1} \subset \Sigma$ така, що $\text{dist}(x, \hat{x}) \geq \eta_1$, $\text{dist}(t, \hat{t}) \geq \eta_1$.

Тоді для довільних $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \tilde{C}}(\overline{Q}, \hat{P})$ та $(x, t) \in \overline{Q}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) &\leq \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \\ &- \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau = \\ &= \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| \times \\ &\times \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau + \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma_{\eta_1}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \\ &- \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau = \\ &= \mathcal{I}_{31}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_{32}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0). \end{aligned}$$

Нехай $\delta_0 > 0$ – фіксоване число. За заданим δ_0 вибираємо число $\eta_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}) \leq \delta_0$ та

$$\eta_1 < \left(\frac{\varepsilon}{12\tilde{C}^{\beta_1}\tilde{C}_0} \right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}.$$

За лемою 4 існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_1 > 0$ такі, що для довільних $(x, t) \in \bar{Q}$ та $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\tilde{C}^{\beta_1}}, \quad (14)$$

$$\int_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\tilde{C}^{\beta_1}}. \quad (15)$$

Тоді з (14), (15) при $(x, t) \in \bar{Q}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{31}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) &\leq \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} \left(|\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y}| + \right. \\ &\left. + |\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| \right) \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau < \tilde{C}^{\beta_1} \left(\frac{\varepsilon}{24\tilde{C}^{\beta_1}} + \frac{\varepsilon}{24\tilde{C}^{\beta_1}} \right) = \frac{\varepsilon}{12}, \end{aligned}$$

а, отже,

$$\sup_{(x, t) \in \bar{Q}} \mathcal{I}_{31}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Виберемо $0 < \eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Для довільної $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ та числа η_2 визначимо множини

$$U_{\eta_2}(x, t) \stackrel{def}{=} \{(y, \tau) \in \Sigma_{\eta_1} : \|x-y\| \leq \eta_2, |t-\tau| \leq \eta_2^2\}.$$

Обчислимо

$$m(U_{\eta_2}(x, t)) = \int_{U_{\eta_2}(x, t)} dy d\tau = \int_{\|x-y\| \leq \eta_2} dy \cdot \int_{|t-\tau| \leq \eta_2^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_2^{n+2},$$

де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в \mathbb{R}^n . Якщо вибрати

$$\eta_2 < \min\left\{ \frac{\eta_1}{2}; \left(\frac{\delta_0}{2\sigma_n} \right)^{\frac{1}{n+2}} \right\},$$

то $m(U_{\eta_2}(x, t)) < \delta_0$. Тоді з (14) та (15) для довільних $(x, t) \in \bar{Q}$ та $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int_{U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\tilde{C}^{\beta_1}}, \quad (16)$$

$$\int_{U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\tilde{C}^{\beta_1}}. \quad (17)$$

Виберемо $\delta_1 < \min\{\delta_0; \frac{\eta_2}{2}\}$. При $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$, $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $\|z\| \leq \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, $|z_0| \leq \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, маємо $(x+z, t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$. При $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$, $(y, \tau) \in \Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)$, $\|x-y\| \geq \eta_2$, $|t-\tau| \geq \eta_2^2$, а отже, $(x, t) \neq (y, \tau)$. Тому функція

$$\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}$$

рівномірно неперервна в області

$$V = \{(x, t; y, \tau) : (x, t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}, (y, \tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)}\}.$$

Тоді існує $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0; \delta_1]$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$, $(x, t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}$, $(y, \tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)}$ при $\alpha\beta_1 > -n-1$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| < \frac{\varepsilon}{36A\tilde{C}^{\beta_1}},$$

де $A = \int_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau$, тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \\ & - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36A\tilde{C}^{\beta_1}} \int_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\tilde{C}^{\beta_1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отже, при $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ із (16), (17) та (18) випливає існування $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{32}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) &= \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \\ & - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau \leq \tilde{C}^{\beta_1} \int_{U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \times \\ & \times \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau + \tilde{C}^{\beta_1} \int_{U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \times \\ & \times \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau + \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x, t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \times \\ & \times \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} = \frac{\varepsilon}{12}, \end{aligned}$$

а отже,

$$\sup_{(x, t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \mathcal{I}_{32}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

При $(x, t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_1 (< \frac{\eta_1}{4})$, $|z_0| < \delta_1 (< \frac{\eta_1}{4})$ буде $(x+z, x+z_0) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}} \subset Q$ або $(x+z, t+z_0) \notin Q$. За рівномірною неперервністю функції $\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}$ на замкненій множині $V_1 = (\overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}) \times Q_{\eta_1}$ враховуючи, що $-\alpha \geq 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \leq 1$, одержуємо: існує $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$ таке, що для довільних $(x, t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}$, $(y, \tau) \in \Sigma_{\eta_1}$, $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_3$, $|z_0| < \delta_3$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}| < \frac{\varepsilon}{12B\tilde{C}^{\beta_1}},$$

де

$$B = \int_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau,$$

звідки

$$\sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z, t+z_0) \in Q}} \mathcal{I}_{32}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) \leq \tilde{C}^{\beta_1} \frac{\varepsilon}{12B\tilde{C}^{\beta_1}} \int_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) dS_y d\tau = \frac{\varepsilon}{12}.$$

Для тих точок $(x, t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(y, \tau) \in \Sigma_{\eta_1}$, $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_1$, $|z_0| < \delta_1$, для яких $(x+z, t+z_0) \notin Q$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z, t+z_0) \notin Q}} \mathcal{I}_{32}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) &\leq \sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z, t+z_0) \notin Q}} \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t})| \times \\ &\times \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z, t+z_0) \notin Q}} \tilde{C}^{\beta_1} \int_{\Sigma_{\eta_1}} \eta_1^{\alpha\beta_1} |\varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t})| \cdot \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \\ &\leq \sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z, t+z_0) \notin Q}} \tilde{C}^{\beta_1} \eta_1^{\alpha\beta_1} \eta_1^{-\alpha} \int_{\Sigma_{\eta_1}} \left| \frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau \leq \tilde{C}^{\beta_1} \tilde{C}_0 \eta_1^{\alpha(\beta_1-1)} < \frac{\varepsilon}{12}, \end{aligned}$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором η_1 . Зауважимо, що при $\beta_1 \in (0, 1)$ також $\alpha(\beta_1 - 1) > 0$.

Доведено, що існує $\tilde{\delta}_2 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \tilde{\delta}_2$, $|z_0| < \tilde{\delta}_2$

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q}} \mathcal{I}_3(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Отже, існує $\hat{\delta}_2 = \min\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \hat{\delta}_2$, $|z_0| < \hat{\delta}_2$ виконується

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q}} \mathcal{I}(x, t, \hat{x}, \hat{t}; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отож, множина $\{H_{1v} : v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \widehat{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})\}$ – одностайно неперервна. За теоремою Шаудера та за умов лем 2, 3, 4 крайова задача (6)-(8) має розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q}, \widehat{P})$. \square

3. Висновки. Ми знайшли достатні умови існування та характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / Лопушанська Г.П. – Львів, 2002.
2. Лопушанська Г.П. Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / Лопушанська Г.П. // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179-190.
3. Чмир О.Ю. Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння / Чмир О.Ю. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134-143.
4. Galaktionov V. On critical Fujita exponents for heat equations with a nonlinear condition on the boundary / Galaktionov V., Livine H. // Israel J. Math. – 1996. – Vol. 94. – P. 125-146.
5. Hu B. On critical exponents for the heat equation with a mixed nonlinear Dirichlet-Neumann nonlinear boundary condition / Hu B., Yin H. // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – Vol. 209. – P. 683-711.
6. Gomez J. Blow-up results and localization of blow-up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition / Gomez J., Marquez V., Wolanski N. // J. Diff. Equations. – 1991. – Vol. 92. – P. 384-401.
7. Lin Z.G. The blow-up properties of solutions to semilinear heat equation with nonlinear boundary conditions / Lin Z.G., Wang M.X. // Z. Angew. Math. Phys. – 1999. – Vol. 50. – P. 361-374.
8. Lopushanska H. Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems / Lopushanska H. // Матем. вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 247-260.
9. Чмир О.Ю. Про розв'язок нелінійної першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях / Чмир О.Ю., Меньшикова О.В. // Вісник нац. ун-ту “Львівська Політехніка”. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 660. – С. 14-19.
10. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач / Ивасишен С.Д. – К., 1990.
11. Эйдельман С.Д. Параболические системы / Эйдельман С.Д. – М., 1964.
12. Ивасишен С.Д. О композиции параболических ядер / Ивасишен С.Д. // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32. – № 1. – С. 35-45.
13. Чмир О.Ю. Точкові особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольterra / Чмир О.Ю. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 220-234.
14. Прудников А.П. Интегралы и ряды / Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. – М., 1981.
15. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. – М., 1976.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2011
прийнята до друку 21.09.2011

**CHARACTER POINTED POWER SINGULARITIES OF
THE SOLUTION OF THE NONLINEAR FIRST GENERALIZED
BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HEAT EQUATION****Oksana CHMYR***Lviv State University of Vital Activity Safety,
Kleparivska Str., 35, Lviv, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com*

Using the Schauder method the character pointed power singularities of the solution of the nonlinear first generalized boundary value problem for heat equation are investigated.

Key words: nonlinear boundary value problem, generalized function, weight functional space, continuous operator, compact set, Schauder fixed-point theorem.

**О ХАРАКТЕРЕ ТОЧЕЧНЫХ СТЕПЕННЫХ ОСОБЕННОСТЯХ
РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРВОЙ ОБОБЩЁННОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ****Оксана ЧМЫРЬ***Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности,
ул. Клепаровская, 35, Львов, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com*

С помощью принципа Шаудера исследовано характер точечных степенных особенностей решения нелинейной первой обобщённой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, обобщённая функция, весовое функциональное пространство, непрерывный оператор, компактное множество, теорема Шаудера о неподвижной точке.