

Національний технічний університет України «КПІ»

МІЖНАРОДНА
НАУКОВО-ПРАКТИЧНА
КОНФЕРЕНЦІЯ
«МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ
ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ»

19–20 квітня 2013 року, Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

Київ — 2013

НЕСТАНДАРТНІ КРАЙОВІ УМОВИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУРАХ

Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна
marta_stasiuk@yahoo.com

В даному повідомленні розв'язана задача про визначення розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля в багат шаровій нескінченній плиті з кусково-сталими коефіцієнтом теплопровідності при наявності зосереджених джерел тепла при нетрадиційних крайових умовах. Розв'язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані.

Постановка задачі та її математична модель

В загальному випадку [1] задача про розподіл температурного поля в багат шаровій плиті, область якої обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$ та поділена на n шарів різної товщини, зводиться до розв'язування на відрізку $[0, l]$ диференціального рівняння

$$(\lambda t)' = -f \quad (1)$$

при певних крайових умовах. Тут $t(x)$ - температура, $\lambda(x)$ - коефіцієнт теплопровідності, $f(x)$ - функція розподілу внутрішніх джерел тепла, а точки $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ - сліди перетину відповідних площин з віссю ox . Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності. На границях шарів закладається наявність зосереджених джерел тепла.

Надалі використовуватимемо наступні позначення: θ_k - характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_k, x_{k+1})$, тобто $\theta_k = \begin{cases} 1, \text{ якщо } ox \in [x_k, x_{k+1}) \\ 0, \text{ якщо } ox \notin [x_k, x_{k+1}) \end{cases}$; $\lambda_k > 0$ - коефіцієнт теплопровідності на проміжку $[x_k, x_{k+1})$; $\delta_k(x - x_k)$ - δ - функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$; s_k - дійсні числа.

Покладемо $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \theta_k$, $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta(x - x_k)$, причому функції $\lambda_k(x)$ на відповідних проміжках вважатимемо неперервними.

Тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x) \theta_k \cdot t' \right)' = - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta(x - x_k) \quad (2)$$

Позначимо ще $y^{[1]} = \lambda y'$ - квазіпохідна (тепловий потік).

До рівняння (2) слід додати систему двох лінійно-незалежних крайових умов, що в загальному випадку є нелокальними [2]:

$$\begin{cases} p_{11} \cdot t(x_0) + p_{12} \cdot t^{[1]}(x_0) + q_{11} \cdot t(x_n) + q_{12} \cdot t^{[1]}(x_n) = \gamma_1 \\ p_{21} \cdot t(x_0) + p_{22} \cdot t^{[1]}(x_0) + q_{21} \cdot t(x_n) + q_{22} \cdot t^{[1]}(x_n) = \gamma_2 \end{cases} \quad (3)$$

Тут p_y, q_y, γ_k - відомі дійсні числа, $t(x_0), t^{[1]}(x_0), t(x_n), t^{[1]}(x_n)$ - значення температури та теплового потоку в точках $x = x_0$ і $x = x_n$ відповідно.

Крайова задача (2), (3) є математичною моделлю розподілу температурного поля в нескінченній плиті при найбільш загальних крайових умовах та припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла.

Введемо вектори $\bar{T} = (t, t^{[1]})^T$, $\bar{S}_k = (0, -s_k)^T$ та матрицю $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_k & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді квазидиференціальне рівняння (2) зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку [3]:

$$\bar{T}' = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \Theta_k \cdot \bar{T} - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{S}_k \delta(x - x_k), \quad (4)$$

причому крайові умови (3) зображуються в матричному вигляді

$$P \cdot \bar{T}(x_0) + Q \cdot \bar{T}(x_n) = \bar{G}, \quad (5)$$

де позначено $P = (p_y)$, $Q = (q_y)$, $i, j = 1, 2$; $\bar{G} = (\gamma_1 \gamma_2)^T$

Розв'язок крайової задачі (4), (5) на довільному проміжку $[x_k, x_{k+1})$ є першою координатою двовимірного вектора [3].

$$\bar{T}_k(x) = B_k(x, x_k) \cdot B(x_k, x_0) \cdot \bar{T}^0 + B_k(x, x_k) \cdot \sum_{i=0}^k B(x_k, x_i) \cdot \bar{S}_i, \quad (6)$$

де $B_k(x, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_k^{-1}(x - x_k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x_k, x_i) = B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdot \dots \cdot B_1(x_{i+1}, x_i) = \prod_{j=i}^{k-1} B(x_{j+1}, x_j)$, - відповідні матриці Коші [2], \bar{T}^0 - початковий вектор [3].

Припустимо, що початковий вектор \bar{T}^0 невідомий, а натомість відомий вектор $\bar{T}_k(x_k)$. Покладаючи в (6) $x = x_k$ отримуємо, що

$$\bar{T}^0 = B^{-1}(x_k, x_0) \cdot \left[\bar{T}_k(x_k) - \sum_{i=0}^k B(x_k, x_i) \cdot \bar{S}_i \right], \quad (7)$$

що дає можливість знайти розподіл температурного поля на будь-якому інтервалі з $[x_i, x_{i+1})$, оскільки:

$$\bar{T}_i(x) = B_i(x, x_i) \cdot \bar{T}_i(x_i) \quad (8)$$

Приклад

Чотиришарова плоска стінка складається з важкого бетону на гранітному наповнювачі, глини, червоної цегли і пінопласту товщини яких відповідно дорівнюють: $l_1 = 20 \text{ см}$, $l_2 = 10 \text{ см}$, $l_3 = 25 \text{ см}$, $l_4 = 5 \text{ см}$ (рис. 1). Температура на границі другого шару стінки $t_2 = 695,15^\circ \text{C}$, густина теплового потоку $t_2^{[1]} = -480,36$.

Коефіцієнти теплопровідності важкого бетону $\lambda_0 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, глини - $\lambda_1 = 1,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$,

червоної цегли $\lambda_2 = 0,455 \frac{Bm}{M \cdot K}$ і пінопласту - $\lambda_3 = 0,04 \frac{Bm}{M \cdot K}$. Між шарами стінки виникають точкові (s_k) джерела тепла $s_1 = 200 \frac{Bm}{M^2}$, $s_2 = -300 \frac{Bm}{M^2}$, $s_3 = 120 \frac{Bm}{M^2}$. Необхідно визначити розподіл температурного поля в чотиришаровій плоскій стінці.

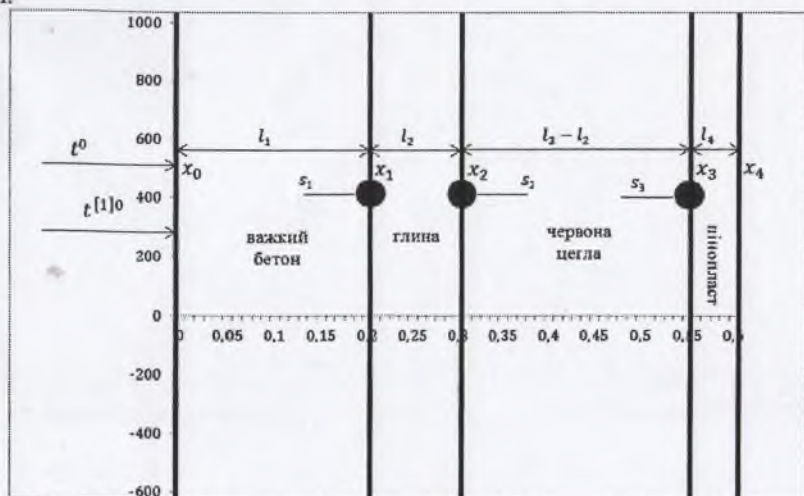


Рис. 1

Розв'язування

Знайдемо розв'язок задачі, коли на зовнішній поверхні стінки ($x = x_2$) задана температура ($t = t_2$), та ($t^{(II)} = t_2^{(II)}$) - густина теплового потоку.

$$\text{Введемо вектор } \bar{T}_2(x_2) = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2^{(II)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 695,15 \\ -480,36 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розподіл температурного поля на проміжку (x_1, x_2) .

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(x_1) &= B_1(x_2, x_1)^{-1} \cdot (\bar{T}_2(x_2) - S_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_2}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} t_2 \\ t_2^{(II)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 - 0,3 \\ 0 & 1,4 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left(\begin{pmatrix} 695,15 \\ -480,36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -300 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 695,15 + \frac{-180,36 \cdot (0,2 - 0,3)}{1,4} \\ -480,36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 736,61 \\ -180,36 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\bar{T}_1(x) = B_1(x, x_1) \cdot \bar{T}_1(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1^{(II)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - 0,2}{1,4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 736,61 \\ -180,36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 762,38 - 128,83x \\ -180,36 \end{pmatrix};$$

Аналогічно знаходимо значення вектора на проміжку $[x_0, x_1]$.

$$\bar{T}_0(x_0) = B_0(x_1, x_0)^{-1} \cdot (\bar{T}_1(x_1) + S_1) = \begin{pmatrix} 800 \\ -380,36 \end{pmatrix}, \bar{T}_0(x) = \begin{pmatrix} 800 - 316,97x \\ -380,36 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розподіл температурного поля на проміжку $(x_2, x_3]$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(x) &= B_2(x, x_2) \cdot (\bar{T}_2(x_2) + S_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_2}{\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-0,3}{0,455} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 723,72 \\ -480,36 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 723,72 + \frac{-480,36 \cdot (x-0,3)}{0,455} \\ -480,36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1040,44 - 1055,74x \\ -480,36 \end{pmatrix}, \bar{T}_2(x_3) = \begin{pmatrix} 760,89 \\ -480,36 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо значення вектора в точці x_4 .

$$\bar{T}_3(x) = B_3(x, x_3) \cdot (\bar{T}_2(x_3) + S_3) = \begin{pmatrix} 5715,84 - 9009x \\ -380,36 \end{pmatrix}, \bar{T}_3(x_4) = \begin{pmatrix} 10,44 \\ -360,36 \end{pmatrix};$$

Розподіл температурного поля чотиришарової плоскої стінки показано на рис. 2.

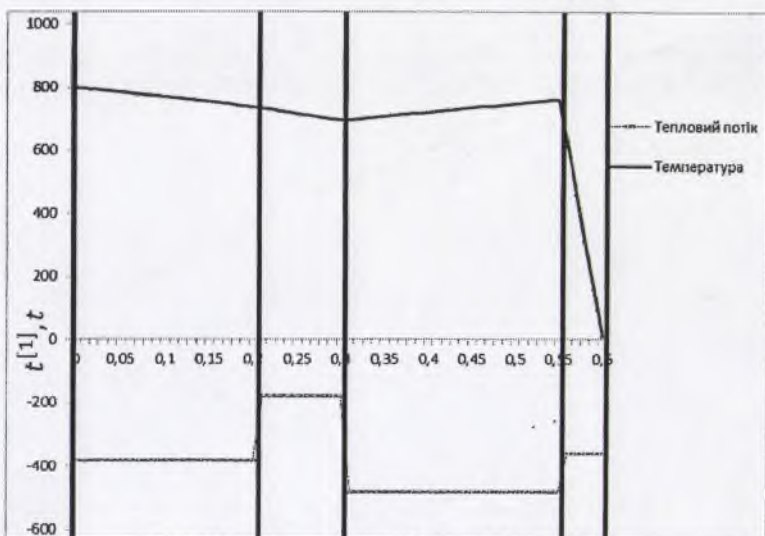


Рис. 2

Список літератури

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел В.П. Теплопередача. Учебник для вузов, Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Энергия», 1975.
2. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власій О.О. Узагальнені квазидиференціальні рівняння – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.
3. Р.М. Тацій, М.І. Кусій, О.Ю. Пазен Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом джерел тепла – Збірник наукових праць ЛДУ БЖД Пожежна безпека, №20, 2012, с.20-26.