Національний технічний університет України «КПІ»

МІЖНАРОДНА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ «МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ»

19–20 квітня 2013 року, Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

Київ — 2013

НЕКЛАСИЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ

М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна

marta_stasiuk@yahoo.com

1. Як відомо із спеціальної класичної літератури [1], розв'язки рівняння Бесселя будуються у вигляді рядів за незалежною змінною x (функції Бесселя першого і другого роду[1]).

В даній роботі пропонується побудова фундаментальної системи розв'язків рівняння Бесселя з параметром на проміжку $[r;R)$ шляхом зведення його до еквівалентної системи рівнянь Вольтери другого роду. Остання розв'язується методом послідовних наближень у вигляді рядів за параметром.

Спосіб проілюстрований на задачі про стійкість вільно опертої пластинки, що має форму кругового кільця.

2. Розглянемо рівняння Бесселя з параметром λ^2 на інтервалі $[r;R)$, $r>0$:

$$(xy')' - \frac{n^2 y}{x} + \lambda^2 xy = 0. \tag{1}$$

2.1.У випадку $n=0$ рівняння (1) набуває вигляду:

$$(xy')' + \lambda^2 xy = 0. \tag{2}$$

Запишемо це рівняння як «неоднорідне»:

$$(xy')' = -\lambda^2 xy. \tag{3}$$

Легко переконатись, що фундаментальну систему розв'язків квазідиференціального рівняння

$$(xy')' = 0 \tag{4}$$

утворюють функції $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=\ln x$. Тоді [2] функція Коші рівняння (4) має вигляд:

$$K(x,s) = \begin{vmatrix} 1 & \ln s \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ln s \\ 1 & \ln x \end{vmatrix} = \ln x - \ln s = \ln\frac{x}{s},$$

звідки випливає, що загальний розв'язок «неоднорідного» рівняння (3) справджує інтегральне рівняння:

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln x - \lambda^2 \int_r^x \ln\frac{x}{s}\, y(s)\cdot s ds,$$

де c_1, c_2 – довільні сталі.

<u>Теорема 1.</u> Розв'язки $\alpha(x)$, $\beta(x)$ системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha(x) = 1 - \lambda^2 \int_r^x \ln\frac{x}{s}\,\alpha(s)\cdot s ds, \\ \beta(x) = \ln x - \lambda^2 \int_r^x \ln\frac{x}{s}\,\beta(s)\cdot s ds \end{cases} \tag{5}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (2).

Розв'язок кожного з системи інтегральних рівнянь (5) шукаємо у вигляді рядів за параметром λ^2:

$$\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x)\lambda^{2k}, \tag{6}$$

$$\beta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x)\lambda^{2k}. \tag{7}$$

Підставляючи (6) і (7) відповідно в перше і друге рівняння системи (5) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ^2, приходимо до рекурентних співвідношень для визначення невідомих функції $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$:

$$\alpha_0(x)=1,\quad \alpha_k(x)=-\int_r^x \ln\frac{x}{s}\alpha_{k-1}(s)\cdot sds,\quad k=1,2,3...$$

$$\beta_0(x)=\ln x,\quad \beta_k(x)=-\int_r^x \ln\frac{x}{s}\beta_{k-1}(s)\cdot sds,\quad k=1,2,3... \tag{8}$$

З теорії інтегральних рівнянь Вольтери другого роду відомо [4], що ряди (6) і (7) – абсолютно збіжні на $[r;R)$ і є там цілими аналітичними функціями параметра λ^2.

2.2. Аналогічно розглянемо рівняння (1) для довільних $n=1,2,3,...$ Запишемо це рівняння у вигляді неоднорідного рівняння:

$$(xy')'-\frac{n^2y}{x}=-\lambda^2xy.$$

Функція Коші для рівняння:

$$(xy')'-\frac{n^2y}{x}=0$$

має вигляд:

$$K(x,s)=\frac{x^ns^{-n}-x^{-n}s^n}{2n}$$

і загальний розв'язок рівняння (1) може бути отриманий як розв'язок інтегрального рівняння:

$$y(x)=c_1x^n+c_2x^{-n}-\lambda^2\int_r^x K(x,s)y(s)\cdot sds.$$

<u>Теорема 2.</u> Для довільного $n=1,2,3,...$ розв'язки $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_n(x)=x^n-\lambda^2\displaystyle\int_r^x\frac{x^ns^{-n}-x^ns^n}{2n}\alpha_n(s)\cdot sds,\\ \beta_n(x)=x^{-n}-\lambda^2\displaystyle\int_r^x\frac{x^ns^{-n}-x^ns^n}{2n}\beta_n(s)\cdot sds\end{cases} \tag{9}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (1).

Розв'язування кожного з рівнянь (9) проводиться методом послідовних наближень.

3. У якості прикладу розглянемо задачу про ейлерову втрату стійкості шарнірно закріпленої пластинки, що має форму концентричного кільця радіусів з радіусами r і R $(0<r<R)$ відповідно з центром в початку координат [3].

Припускається,що на пластинку діє гідростатичне навантаження $P=\lambda^2$, що направлене по нормалі до межі пластинки. З теорії стійкості пластинок відомо [3], що знаходження критичного навантаження $P_{кр}$ зводиться до розв'язування задачі на власні значення:

$$(xy')'+\lambda^2 xy=0, \tag{10}$$

$$y|_{x=r}=y|_{x=R}=0 \tag{11}$$

та знаходження її першого власного значення.

Загальний розв'язок рівняння (10), як випливає з 2.1, має вигляд:

$$y(x)=c_1\alpha(x)+c_2\beta(x), \tag{12}$$

де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ виражаються формулами (6) і (7) відповідно, а c_1, c_2 – довільні сталі. Застосовуючи до (12) умови (11), приходимо до однорідної алгебраїчної системи рівнянь для визначення невідомих сталих c_1, c_2:

$$c_1\alpha(r)+c_2\beta(r)=0,$$
$$c_1\alpha(R)+c_2\beta(R)=0.$$

Для існування нетривіальних (ненульових) розв'язків цієї системи необхідно і досить виконання умови:

$$\det\begin{pmatrix}\alpha(r) & \beta(r)\\ \alpha(R) & \beta(R)\end{pmatrix}=0. \tag{13}$$

(13) є *характеристичним рівнянням* для визначення критичного навантаження $P_{кр}$. Слід зауважити (див. формули (5)), що $\alpha(r)=1,\ \ \beta(r)=\ln r$.

Для спрощення обчислень приймемо $r=1,\ \ R=e=2,71828\ldots$. Тоді $\beta(r)=\beta(1)=0$, а визначник (13) набуде вигляду:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha(R) & \beta(R)\end{pmatrix}=\beta(R). \tag{14}$$

З вигляду визначника (14) випливає, що нам потрібно розв'язати лише одне інтегральне рівняння, а саме:

$$\beta(x)=\ln x-\lambda^2\int_1^x \ln\frac{x}{s}\beta(s)\cdot s ds.$$

Для нього справедливе зображення (7), а рекурентні співвідношення (8) при $r=1$ набувають вигляду:

$$\beta_0(x)=\ln x,\quad \beta_k(x)=-\int_1^x \ln\frac{x}{s}\beta_{k-1}(s)\cdot s ds,\quad k=1,2,3,\ldots. \tag{15}$$

На основі (15) поступово отримуємо при $x=e$:

$$\beta_0(e)=1,\quad \beta_1(e)=-0,5,\quad \beta_2(e)=0,0744,\quad \beta_3(e)=-0,00545,\quad \beta_4(e)=0,000275.$$

Отже, характеристичне рівняння $\beta(e)=0$ набуває вигляду:

$$1-0,5\lambda^2+0,0744\lambda^4-0,00545\lambda^6+0,000275\lambda^8-...=0. \qquad (16)$$

Отримане четверте наближення $\beta_4(e)$ дозволяє знайти двосторонню оцінку першого кореня рівняння (16) (критичного навантаження $P_{kp}=\lambda_1^2$) [5]. Справедлива двостороння оцінка:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{B_4}}<P_{kp}=\lambda_1^2<\sqrt{\frac{2}{B_2+\sqrt{2B_4-B_2^2}}},$$

де

$$B_2=\beta_1^2(e)-2\beta_2(e),$$
$$B_4=\beta_1^4(e)-4\beta_1^2(e)\beta_2(e)+4\beta_1(e)\beta_3(e)+2\beta_2^2(e)-4\beta_4(e).$$

Підставляючи числові значення, отримуємо:

$$3,255<p_{kp}=\lambda_1^2<3,259.$$

Слід зауважити, що максимальна відносна похибка тут не перевищує величини:

$$\delta=\frac{3,259-3,255}{3,255}\cdot 100<0,123(\%).$$

Список літератури

1.Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Монографія / Тихонов А. И., Самарский А. А. – Москва. «Наука», 1977.– 736 с.

2. В. Кісілевич, М. Стасюк, Р. Тацій. Конструкція елементів фундаментальної матриці квіазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами./В.Кісіленвич//– Вісник НУ «ЛП» . фіз.-мат. науки. – 2004.– № 518. – С. 30-35.

3. А.С. Вольмир Устойчивость деформируемых систем: Монографія / А.С. Вольмир – Москва:. «Наука», 1967. – 975 с.

4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике: Монографія / Михлин С. Г. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 320 с.

5. Бернштейн С. А., Керопян К. К. Определение частот стержневых систем методом спектральной функции: Монографія / Бернштейн С. А., Керопян К. К. – М. Госстройиздат, 1960. – 240 с.