НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ

XVIII міжвузівської
науково-практичноїконференції

"Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах"

ЛЬВІВ - 2013

Відповідальні за випуск:

к.ф.-м.н.Мохонько Валентина Дмитрівна (Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка")

к.пед.н. Васіна Людмила Степанівна (Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка")

Матеріали XVIII Міжвузівської науково-практичної конференції "Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах"

ISBN 966-666-068-7

До збірника увійшли матеріали XVIII міжвузівської науково-практичної конференції *«Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах»*, яка проходила 20 лютого 2013 року у Технічному коледжі Національного університету «Львівська політехніка».

Зміст

Про графічний метод розв'язування алгебраїчних рівнянь

Карабин О.О., Чмир О.Ю.,
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Як відомо, розв'язати алгебраїчно можна лише алгебраїчні рівняння певних типів. Проте існують загальні способи, що дають змогу знайти наближені значення дійсних коренів рівнянь.

Розглянемо графічний метод наближеного розв'язування рівнянь. При графічному розв'язуванні рівняння його корені знаходяться геометричними побудовами.

Графічний метод відіграє важливу роль як допоміжний засіб, застосовуваний при наближеному розв'язуванні рівнянь. Графіки функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ часто дають можливість визначити число коренів рівняння, відшукати ті проміжки, в яких містяться корені, і визначити наближено їх числові значення. Результати, здобуті графічним методом, перевіряються й уточнюються обчислювальними методами.

Нехай дано рівняння $F(x)=0$. Його розв'язування можна геометрично тлумачити як знаходження точок перетину лінії графіка функції $y=F(x)$ з віссю абсцис. Якщо графік $y=F(x)$ не має спільних точок з віссю абсцис, то рівняння не має дійсних коренів. Але при зростанні степеня рівняння кількість його коефіцієнтів збільшується, а це ускладнює побудову кривої. Задачу можна спростити, якщо рівняння $F(x)=0$ подати у вигляді $\varphi(x)=\psi(x)$. Найчастіше одну з цих функцій вибирають так, щоб відповідна крива не залежала від параметрів рівняння, тобто залишалась незмінною для всіх рівнянь даного виду. Якщо побудуємо графіки функцій $y=\varphi(x)$ і $y=\psi(x)$, використовуючи табличні значення та властивості цих функцій, то абсциси точок перетину їх будуть коренями даного рівняння.

Розглянемо графічний спосіб розв'язування квадратного рівняння. Квадратне рівняння $x^2+px+q=0$ можна подати у вигляді $x^2=-px-q$ і тлумачити як рівність двох функцій

$$y=x^2 \text{ та } y=-px-q.$$

Побудувавши графіки цих функцій і визначивши абсциси їх точок перетину, знайдемо дійсні корені даного рівняння.

Приклад. Знайти корені рівняння $x^2+1,5x-1=0$.

Побудуємо графіки функцій $y=x^2$ та $y=-1,5x+1$. Пряму $y=-1,5x+1$, можна провести за допомогою прямого кута косинця. Обгрунтуємо цей спосіб.

Візьмемо точки $N(-p;-1)$ і $Q(0;-q)$. Пряма ON матиме рівняння $y=\frac{1}{p}x$, оскільки вона проходить через початок координат і точку $N(-p;-1)$. Якщо з точки Q опустити перпендикуляр QS на пряму NO, то дістанемо шукану пряму (рис. 1).

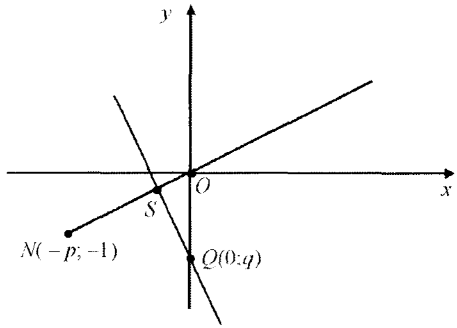

Рис. 1

Прикладемо прямий кут косинця так, щоб одна його сторона пройшла через початок координат і точку $N(-1,5;-1)$, а друга – через $Q(0;1)$. Абсциси точок перетину другої сторони з параболою будуть шуканими коренями. Вони дорівнюють 0,5 і – 2. (Рис. 2)

Відомо, що кожне рівняння третього степеня $z^3+p_1z^2+p_2z+p_3=0$ підстановкою $z=x-\frac{p_1}{3}$ зводиться до вигляду

$$x^3+px+q=0. \qquad (1)$$

Щоб рівняння (1) розв'язати графічно, пов'яжемо його з системою

$$y=x^3,\ y=-px-q. \qquad (2)$$

Перше з рівнянь визначає кубічну параболу, друге – пряму лінію. Абсциси точок перетину цих ліній і будуть коренями рівняння (1).

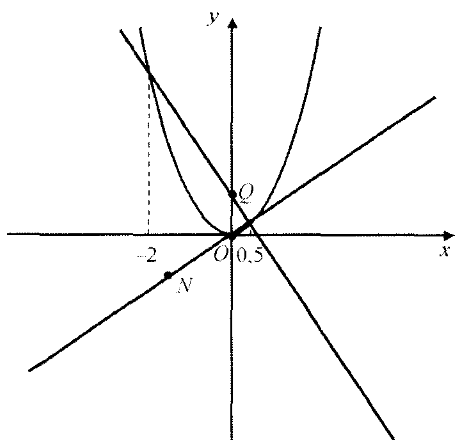

Рис. 2

Приклад. Знайти корені рівняння $x^3 - 3{,}25x + 1{,}5 = 0$.

Побудуємо графік функції $y = x^3$. Вибираємо точки $N(3{,}25; -1)$ і $Q(0; -1{,}5)$. Пряма $y = 3{,}25x - 1{,}5$ проходитиме через точку Q перпендикулярно до прямої QN. Одну із сторін прямого кута косинця розміщуємо так, щоб вона проходила через початок координат і точку N, а другу так, щоб вона проходила через точку Q. Абсциси точок перетину другої сторони з кубічною параболою будуть шуканими коренями: 0,5; 1,5 і – 2. (Рис. 3)

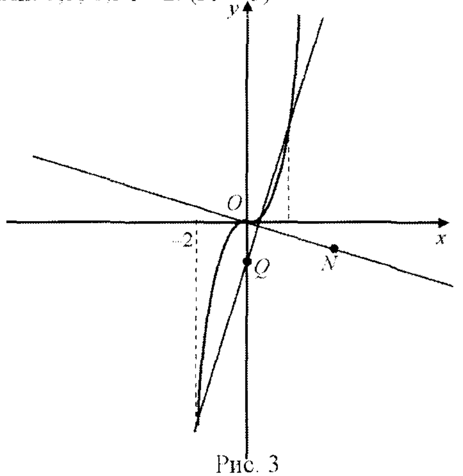

Рис. 3

Поклавши в кожному з рівнянь (2) $x = x_1$, $y = x_1 y_1$, дістанемо

$$y_1 = x_1^2, \quad x_1 y_1 + p x_1 + q = 0. \qquad (3)$$

Абсциси точок перетину ліній, що визначаються рівняннями (3), будуть коренями рівняння (1). Перше з рівнянь визначає параболу, а друге – гіперболу $x_1(y_1 + p) = -q$ з центром у точці $(0; -p)$ та асимптотами $x_1 = 0$, $y_1 = -p$. Коли парабола та гіпербола перетинаються в трьох точках, рівняння (1) має три дійсні корені. (Рис. 4)

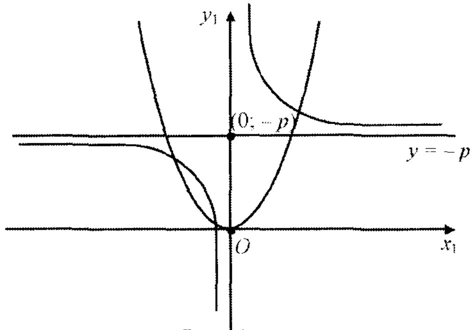

Рис. 4

З рівнянь (3) підстановкою $y_1 = y_2 - p$, $x_1 = x_2$ прийдемо до рівнянь

$$y_2 = x_2^2 + p,\ x_2 y_2 + q = 0. \qquad (4)$$

Оскільки $x_1 = x_2$, то абсциси точок перетину параболи $y_2 = x_2^2 + p$ та гіперболи $x_2 y_2 = -q$, асимптотами якої є координатні осі, є коренями рівняння (1).

Загальне рівняння четвертого степеня $z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 = 0$ підстановкою $z = x - \frac{p_1}{4}$ зводиться до вигляду

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \qquad (5)$$

Оскільки вільний член може бути як додатним, так і від'ємним ($|r| = d^2$), то рівняння (1) можна подати так:

$$x^4 + px^2 + qx + d^2 = 0, \qquad (5')$$

$$x^4 + px^2 + qx - d^2 = 0. \qquad (5'')$$

Виразимо параметри p, q, r через нові параметри a, b, R так, щоб

$$p = -(2b-1),\ q = -2a,\ r = a^2 + b^2 - R^2. \qquad (6)$$

Тоді знаходження коренів рівняння четвертого степеня зведеться до розв'язування системи таких рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \end{cases} \qquad (7)$$

Перше рівняння визначає параболу, а друге – коло з центром в точці $Q(a, b)$ і радіусом R. Виключаючи з рівняння (7) змінну y, дістанемо:

$$x^4 - (2b-1)x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \qquad (8)$$

Координати a, b і R знаходимо із співвідношень (6)

$$a = -\frac{q}{2},\ b = -\frac{p-1}{2},\ R = \sqrt{a^2 + b^2 - r}.$$

З останньої рівності для (5') матимемо $R = \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}$.

Для побудови R знаходимо точку $Q(a;b)$. Ставимо ніжку циркуля в початок координат і проводимо дугу кола радіусом OQ, точку перетину якої з віссю Ox позначимо через N. На осі Oy від початку координат відкладаємо відрізок $OL = d = \sqrt{|r|}$. Відрізок LN буде радіусом R. (Рис. 5)

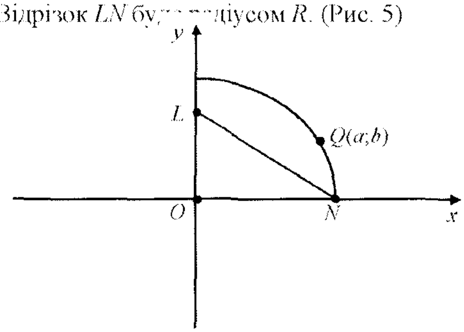

Рис. 5

Приклад. Знайти корені рівняння $x^4-2x^2+3x-2=0$.

За рівностями (6) знаходимо $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{-2-1}{2}=\frac{3}{2}$. Позначаємо центр Q_1 і будуємо радіус кола $R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+2}=\sqrt{6,5}$. Коренями рівняння є абсциси точок перетину параболи з колом. Матимамо $x_1=1$, $x_2=-2$; два інші корені комплексні.

Для рівняння (5'') радіус кола визначається за формулою $R=\sqrt{a^2+b^2-d^2}$. Побудуємо його. Спочатку позначимо точку $Q(a;b)$; на осі Oy відкладемо відрізок $OL=\sqrt{|r|}=d$; через L проведемо перпендикуляр до Oy і радіусом OQ описуємо коло. Точку перетину кола з проведеним перпендикуляром позначимо через N. Відрізок ON – шуканий радіус. (Рис.6)

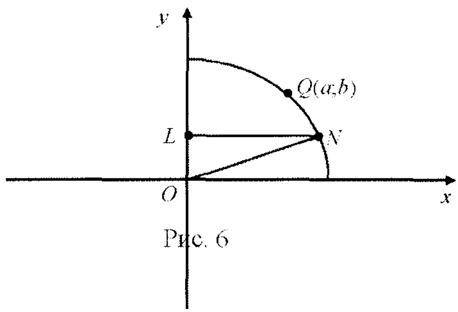

Рис. 6

Рис. 6

Приклад. Знайти корені рівняння $x^4-4x^2+x+\frac{5}{2}=0$.

За формулами (6) знаходимо $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$ і $R=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}-\frac{5}{2}}=2$. Побудуємо коло з центром в точці $Q_2(-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$. За точками перетину цього кола з параболою знаходимо корені рівняння $x_1=-1,95$, $x_2=-0,7$, $x_3=1,5$, $x_4=1,2$.

Зауваження. Користуючись рівнянням (8), можна знайти корені рівняння (1) за умови, що $a^2+b^2-R^2=0$. Матимемо $x^3-(2b-1)x-2a=0$, а тому

$$a=-\frac{q}{2},\ b=\frac{p-1}{2},\ R=\sqrt{a^2+b^2},$$

тобто радіус дорівнює відстані від початку координат до центра Q кола.

Дійсними коренями рівняння п'ятого степеня

$$x^5+px+q=0 \qquad (9)$$

є абсциси точок перетину графіків функцій $y=x^5$, $y=-px-q$.

Приклад. Знайти корені рівняння $x^5-2x+1=0$.

Будуємо графіки функцій $y=x^5$, $y=2x-1$ та знаходимо точки їх перетину: $x_1=-1,23$, $x_2=0,5$, $x_3=1$. Інші два корені рівняння комплексні.

Замість системи $y = x^5$, $y = -px - q$ можна розглядати еквівалентну їй систему $\frac{y}{x^2} = x^3$, $y = -px - q$ ($x \neq 0$, бо вважається, що $q \neq 0$). Якщо далі скористатися підстановкою $\frac{y}{x^2} = y_1$, $x = x_1$, то після перетворень дістанемо:

$$y_1 = x_1^3, \; y_1^2 + px_1^2 + qx_1 = 0.$$

Отже, щоб знайти корені рівняння (9), можна побудувати криву другого порядку $y_1^2 + px_1^2 + qx_1 = 0$, якщо в координатній площині заздалегідь буде задано кубічну параболу. Якщо $p = 1$, то кривою другого порядку буде коло, яке проходить через початок координат, з центром у точці $C(-\frac{q}{2};0)$.

Друковані конспекти: можливості використання

Мохонько А.З.,
Національний університет "Львівська політехніка",
Васіна Л.С., Мохонько В.Д.,
Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка"

Зменшення годин на вивчення вищої математики ставить перед викладачем методичні завдання – як досягти оптимального розуміння та засвоєння програмного матеріалу, враховуючи, що не можна його необмежено скорочувати, оскільки порушується цілісність, логіка, прикладні можливості самої вищої математики і страждають предмети, які її використовують (диференціальні рівняння, теорія ймовірностей, теорія функцій комплексної змінної і операційне числення, спеціальні предмети…).

Ряд студентів не можуть чи не навчені одночасно слухати, розуміти і записувати, тобто вони або слухають і стараються зрозуміти, при цьому страждає конспект, або пишуть (так робить більшість), щоб потім зрозуміти. Але, на жаль, швидкість запису суттєво обмежує обсяг матеріалу, а якість записів не забезпечує повноцінного відтворення роботи, проведеної в аудиторії. При такому способі навчання працюють моторика, слухова і зорова пам'ять, а її логічна і асоціативна складові працюють менше.

Одним із методичних прийомів, які дозволяють скоректувати ситуацію є використання друкованих конспектів (опорних лекційних, довідкових, узагальнюючих основні прийоми і методи, конспектів із системою основних навчальних завдань…). Друкований конспект (д.к.), виданий студентам, дає можливість економити час: студенти, маючи д.к. слідкують за поясненням: відповідно збільшується обсяг і якість подачі навчального матеріалу, кількість прикладів і контрприкладів, які його ілюструють; включаються опорні схеми, зв'язки, таблиці, які потім використовуються на інших заняттях; розглядаються