

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

П'ЯТНАДЦЯТА
МІЖНАРОДНА
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА

15–17 травня 2014 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ
II

Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз

Київ — 2014

ПРО ТІНЬ СПЕКТРУ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

О. О. Карабин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна

Oksana_Karabyn@mail.ru

Нехай T — інтервал $[0, 2\pi)$. Розглянемо його як адитивну групу з додаванням за модулем 2π . Нехай $H = L_2(T)$ — гільбертовий простір із стандартною мірою Лебега. Для деякого фіксованого нескінченно малого дійсного числа $h > 0$ визначимо:

$$\forall x \in H \quad Ax(t) = \frac{1}{h^2} (x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)), \quad t \in T.$$

Оператор $A \in B(H)$, але $\|A\| = \frac{4}{h^2} \approx \infty$. Оператор A перепишемо у вигляді

$$A = \frac{1}{h^2} (S - I)^2,$$

де S — оператор зсуву:

$$Sx(t) = x(t+h).$$

Оператор A є унітарно еквівалентний оператору \hat{A} в $\hat{H} = L_2(Z)$ множення на λ_n . Оператори A та \hat{A} є граф-колостандартними. Тінь ${}^\circ(\hat{A})$ оператора \hat{A} є оператором множення на ${}^\circ\lambda_n = -n^2$ в \hat{H} . З унітарної еквівалентності операторів A та \hat{A} отримуємо, що

$$\forall x \in \text{dom}({}^\circ A) \quad ({}^\circ A)x = x''.$$

Власними значеннями оператора A є числа

$$\lambda_n = \frac{1}{h^2} (e^{inh} - 1)^2,$$

а власними функціями $\varphi_n(t) = e^{int}$. Власні значення λ_n оператора A розташовані на нескінченно великій кардіоїді, заданій в полярній системі координат рівнянням

$$\rho = \frac{2}{h^2} (1 + \cos \varphi).$$

Тінню цієї кривої є здвоєна піввісь $(-\infty, 0]$ (її верхній і нижній береги), де розташовані власні значення ${}^\circ\lambda_n = -n^2$ оператора ${}^\circ A$.