Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

П'ЯТНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

15–17 травня 2014 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

I

Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування

Київ — 2014

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕНЛОНЕРЕНОСУ В БАГАТОСТУНІНЧАТОМУ СТРИЖНІ

Р. М. Тацій, Б. С. Воробець, О. Ю. Назен
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна,
opazen@gmail.com

Розглядається задача про визначення стаціонарного температурного поля в симетричному $2n$-ступінчатому стрижні з урахуванням теплообміну його бічної поверхні з навколишнім середовищем. Припускається, що всі елементи стрижня виготовлені з різних матеріалів та мають різні геометричні характеристики. Припускається також, що відома (виміряна) температура стрижня на одному з його торців.

Така задача зводиться до розв'язування квазідиференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\cdot\frac{dt}{dx}\right]-\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Theta_i t=-t_c\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Theta_i \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} t(x_n)=t^n \\ t^{[1]}(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

Тут $x_0=0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=\ell$ — координати кінців правої половини складових стрижня; λ_i — коефіцієнт теплопровідності матеріалу на проміжку $[x_i,x_{i+1})$; $t=\sum_{i=0}^{n-1}t_i(x)\Theta_i$ — температура стрижня, причому $t_i(x)$ — її складова на $[x_i,x_{i+1})$; $\Theta_i=\begin{cases}1, & x\in[x_i,x_{i+1})\\ 0, & x\notin[x_i,x_{i+1})\end{cases}$ характеристична функція проміжку $[x_i,x_{i+1})$; $\varepsilon_i=\dfrac{\alpha_i}{h_i}$, де α_i — коефіцієнт теплообміну $(i+1)$-ї ланки стрижня, h_i — відношення площі поперечного перерізу цієї ланки до її периметра; $t_i^{[1]}(x)\overset{\text{def}}{=}\lambda_i t_i'(x)$ — тепловий потік (квазіпохідна [1]) на $[x_i,x_{i+1})$; t^n — температура правого торця; t_c — температура навколишнього середовища.

Зауважимо, що для одноступінчатого стрижня в загальному (нестаціонарному) випадку задача теплопровідності розглядається в монографії [2].

Відомим методом [1] крайова задача (1), (2) зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\overline{T}'=A\cdot\overline{T}+\overline{R} \tag{3}$$

з двоточковою умовою

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(0) \\ t^{[1]}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_n) \\ t^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^n \end{pmatrix} \tag{4}$$

де $\overline{T} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{T}_i$, $\overline{T}_i = (t_i,\ t_i^{[1]})^T$, $\overline{R} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{R}_i \Theta_i$, $\overline{R}_i = (0,\ t_c \varepsilon_{i+1})^T$, $A = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Theta_i$,

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_i} \\ \varepsilon_{i+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $B_i(x, s)$ матриця Коші однорідної системи

$$\overline{T}_i' = A_i \cdot \overline{T}_i; \qquad \overline{Z}_i \overset{df}{=} \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s) \overline{R}_{i-1}(s) ds, \ i = 1, 2, ..., n-1, n.$$

Позначимо

$$B(x_p, x_q) \overset{df}{=} \prod_{i=0}^{p-q-1} B_{p-i-1}(x_{p-i}, x_{p-i-1}), B(x_p, x_p) = E \tag{5}$$

$$\overline{P}^0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B(x_n, x_0) \right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ t^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i) \cdot \overline{Z}_i \right] \tag{6}$$

Справедливе наступне.

Твердження. На кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$ двоточкова задача (3), (4) має єдиний розв'язок, що зображується у вигляді

$$\overline{T}_i(x) = B_i(x, x_i) \cdot \left[B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}^0 + \sum_{j=0}^{i} (B(x_i, x_j) \cdot \overline{Z}_i) \right] + \int_{x_i}^{x} B_i(x, s) \overline{R}_i ds,$$

де матриці $B(x_i, x_j)$ та вектор $\overline{P}^0$ обчислюються за формулами (5) та (6) відповідно.

Розглянуто ілюстративний приклад 10-ти ступінчатого симетричного стрижня кусково-сталого, круглого перерізу, що складається з 5-ти різних матеріалів.

Проведено параметричний аналіз впливу теплофізичних і геометричних характеристик на розподіл температури та теплового потоку в такому стрижні.

Список літератури

1. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. Тацій, М. Стасюк, В. Мазуренко, О. Власій. — Дрогобич: Коло, 2011. — 311 с.

2. Лыков Н. Н. Теория теплопроводности. — М: Высшая школа, 1967. — 559 с.