

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КНІУ»

П'ЯТНАДЦЯТА
МІЖНАРОДНА
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА

15–17 травня 2014 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

I

Диференціальні та інтегральні рівняння,
їх застосування

Київ — 2014

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Савельева Е. В., Симчук Я. В., Синчило С. В. <i>Взаимодействие поперечных плоских волн в нелинейных нанокompозитных материалах</i> | 271 |
| Савин В. Г., Бабаев А. А., Губская В. В. <i>Нестационарные режимы излучения акустических импульсов цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем контактирующим с жидкостью</i> | 272 |
| Савчин В. М. <i>Бивариационные задачи с непотенциальными операторами и симметрии</i> | 273 |
| Сембер Д. А. <i>Умови збіжності та алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Кляйна — Гордона</i> | 275 |
| Семененко В. Н., Семененко Т. Н., Крыжановская Т. В. <i>Неустойчивость и автоколебания частичных вентилируемых каверн</i> | 278 |
| Семенов П. К., Аблемова З. С. <i>Математическое моделирование взаимодействия нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с многослойным неоднородным основанием в условиях высокотемпературной ползучести</i> | 280 |
| Семко В. В., Семенов П. К. <i>Конечно-разностные уравнения расчета нелинейно-упругой стержневой пластины, взаимодействующей с неоднородным основанием</i> | 281 |
| Серов М. І., Блажко Л. М. <i>Розв'язки солітонного типу рівняння синус-Гордон</i> | 282 |
| Серов М. І., Омелян О. М. <i>Галілеївська інваріантність багатовимірної системи рівнянь реакції — дифузії</i> | 283 |
| Серов М. І., Серова М. М. <i>Конформна інваріантність нелінійного двовимірного рівняння д'Аламбера</i> | 285 |
| Сиренко А. С. <i>Интервальная устойчивость линейных дискретных систем</i> | 286 |
| Скоромник О. В. <i>Решение многомерного интегрального уравнения с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре по пирамидальной области</i> | 288 |
| Сметанкіна Н. В., Сметанкін В. О. <i>Нестационарні коливання шаруватих оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні</i> | 290 |
| Сороговец И. Б., Макаренко М. В. <i>Метод разделения переменных в задачах определения температуры трехслойной пластины</i> | 291 |
| Столярчук Р. <i>Явні та неявні експоненціальні інтегратори для розв'язку початкових задач</i> | 294 |
| Сторожук Є. А., Чернишенко І. С., Руденко І. Б., Харенко С. Б. <i>Врахування зміцнення і розвантаження при дослідженні пружнопластичного стану оболонок з отворами</i> | 295 |
| Сумбатов А. С. <i>Об интеграле уравнений частицы, скатывающейся по кривой с трением</i> | 296 |
| Тарасенко О. В. <i>Про асимптотичний розв'язок задачі оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь</i> | 298 |
| Тасмамбетов Ж. Н. <i>О произведениях функций Бесселя</i> | 299 |
| Тацій Р. М., Воробець Б. С., Пазен О. Ю. <i>Математичне моделювання процесу теплопереносу в багатоступінчатому стрижні</i> | 303 |
| Тацій Р. М., Стасюк М. Ф. <i>До означення розв'язку лінійної диференціальної системи з мірама</i> | 305 |
| Тищук Т. В. <i>Типи періодичних траєкторій деякого класу унімодальних відображень</i> | 306 |

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕНЛОНЕРЕНОСУ В БАГАТОСТУПІНЧАТОМУ СТРИЖНІ

Р. М. Тацій, Б. С. Воробець, О. Ю. Назен

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
Львів, Україна,
opazen@gmail.com*

Розглядається задача про визначення стаціонарного температурного поля в симетричному $2n$ -ступінчатому стрижні з урахуванням теплообміну його бічної поверхні з навколишнім середовищем. Припускається, що всі елементи стрижня виготовлені з різних матеріалів та мають різні геометричні характеристики. Припускається також, що відома (виміряна) температура стрижня на одному з його торців.

Така задача зводиться до розв'язування квазідиференціального рівняння

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \frac{dt}{dx} \right] - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Theta_i t = -t_c \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Theta_i \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} t(x_n) = t^n \\ t^{[1]}(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Тут $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \ell$ — координати кінців правої половини складових стрижня; λ_i — коефіцієнт теплопровідності матеріалу на

проміжку $[x_i, x_{i+1})$; $t = \sum_{i=0}^{n-1} t_i(x) \Theta_i$ — температура стрижня, причому $t_i(x)$ — її

складова на $[x_i, x_{i+1})$; $\Theta_i = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$ характеристична функція про-

міжку $[x_i, x_{i+1})$; $\varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{h_i}$, де α_i — коефіцієнт теплообміну $(i+1)$ -ї ланки

стрижня, h_i — відношення площі поперечного перерізу цієї ланки до її периметра;

$t_i^{[1]}(x) = \lambda_i t_i'(x)$ — тепловий потік (квазіпохідна [1]) на $[x_i, x_{i+1})$; t^n — температура правого торця; t_c — температура навколишнього середовища.

Зауважимо, що для одноступінчатого стрижня в загальному (нестационарному) випадку задача теплопровідності розглядається в монографії [2].

Відомим методом [1] крайова задача (1), (2) зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\overline{T}' = A \cdot \overline{T} + \overline{R} \quad (3)$$

з двоточною умовою

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(0) \\ t^{[1]}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_n) \\ t^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^n \end{pmatrix} \quad (4)$$

де $\bar{T} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{T}_i$, $\bar{T}_i = (t_i, t_i^{[1]})^T$, $\bar{R} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{R}_i \Theta_i$, $\bar{R}_i = (0, t_c \varepsilon_{i+1})^T$, $A = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Theta_i$,

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{i+1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_i}$$

Нехай $B_i(x, s)$ матриця Коші однорідної системи

$$\bar{T}_i' = A_i \cdot \bar{T}_i; \quad \bar{Z}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s) \bar{R}_{i-1}(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n.$$

Позначимо

$$B(x_p, x_q) = \prod_{i=0}^{p-q-1} B_{p-i-1}(x_{p-i}, x_{p-i-1}), \quad B(x_p, x_p) = E \quad (5)$$

$$\bar{P}^0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B(x_n, x_0) \right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ t^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{i=0}^n B(x_n, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right] \quad (6)$$

Справедливе наступне.

Твердження. На кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$ двоточкова задача (3), (4) має єдиний розв'язок, що зображується у вигляді

$$\bar{T}_i(x) = B_i(x, x_i) \cdot \left[B(x_i, x_0) \cdot \bar{P}^0 + \sum_{j=0}^i (B(x_i, x_j) \cdot \bar{Z}_j) \right] + \int_{x_i}^x B_i(x, s) \bar{R}_i ds,$$

де матриці $B(x_i, x_j)$ та вектор \bar{P}^0 обчислюються за формулами (5) та (6) відповідно.

Розглянуто ілюстративний приклад 10-ти ступінчатого симетричного стрижня кусково-сталого, круглого перерізу, що складається з 5-ти різних матеріалів.

Проведено параметричний аналіз впливу теплофізичних і геометричних характеристик на розподіл температури та теплового потоку в такому стрижні.

Список літератури

1. Узагальнені квазидиференціальні рівняння / Р. Тацій, М. Стасюк, В. Мазуренко, О. Власій. — Дрогобич: Коло, 2011. — 311 с.
2. Лыков Н. Н. Теория теплопроводности. — М: Высшая школа, 1967. — 559 с.