ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Міжнародна науково-практична конференція курсантів і студентів "Проблеми та перспективи розвитку забезпечення безпеки життєдіяльності"

27 березня 2015 р.

Львів

УДК $[510.22+519.1](075.8)$

ГРУПИ СИМЕТРІЙ ДЕЯКИХ МНОГОКУТНИКІВ ТА МНОГОГРАННИКІВ

Кабалюк Д.С., Поліщук О.В.
Стасюк М.Ф., доцент, к.ф.-м.н.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Розглянемо повороти правильного трикутника навколо його центра O. (рис.1)

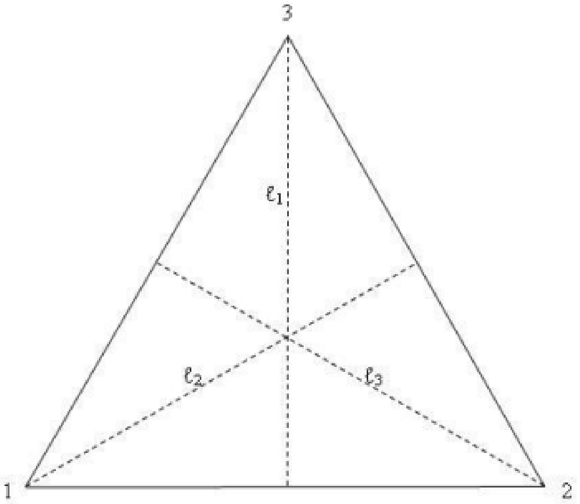

Рис.1

Вважатимемо, що два повороти збігаються, якщо вони відрізняються на повне число обертів. Є три повороти, які переводять правильний трикутник в себе: на 0^0, 120^0 і 240^0.

Помножити два повороти − це послідовно здійснити їх один за одним. Якщо позначити нульовий поворот за α_0, поворот на 120^0 за α_1, а поворот на 240^0 за α_2, то отримаємо правила множення поворотів, які можна подати у вигляді таблиці:

Таблиця 1

«•»	α_0	α_1	α_2
α_0	α_0	α_1	α_2
α_1	α_1	α_2	α_0
α_2	α_2	α_0	α_1

Окрім поворотів можна розглянути й симетричні перетворення правильного трикутника відносно його трьох осей симетрії: l_1, l_2, l_3. (рис.1) Отже трикутник має ще три перетворення симетрії відносно цих осей, які позначимо $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ відповідно.

Можна перевірити, що відносно операції «•» − послідовного здійснення симетричних перетворень − сукупність симетрій $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ утворює групу, в якій роль одиничного елемента виконує тотожне перетворення α_0.

Щоб дати алгебраїчну інтерпретацію сукупності симетрій правильного трикутника, охарактеризуємо кожну симетрію трикутника відображенням її вершин: $A_1 \to A_{i_1}$, $A_2 \to A_{i_2}$, $A_3 \to A_{i_3}$, де i_1, i_2, i_3 − це числа 1,2,3, розміщені в довільному порядку. А це означає, що кожне перетворення симетрії правильного трикутника можна подати, як підстановку, а саме:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ці підстановки утворюють групу S_3 підстановок з 3-х елементів. Ця група не є ні комутативною (наприклад $\alpha_2 \bullet \alpha_3 = \alpha_5$, $\alpha_3 \bullet \alpha_2 = \alpha_4$), ні циклічною. Перші три підстановки з (1) відповідають перетворенням поворотів навколо центра O і утворюють підгрупу парних підстановок A_3 з 3-х елементів . Ця підгрупа – циклічна група з твірним елементом α_1 або α_2. З таблиці 1 видно, що група поворотів навколо центра – комутативна.

Отже надалі дослідження перетворень симетрії правильного трикутника зводиться до дослідження відповідних груп підстановок.

Такий самий підхід застосуємо до дослідження групи симетрій ромба, яка складається з 4-х елементів: з тотожного перетворення β_0, з поворотів β_1, β_2 навколо кожної з діагоналей ромба на 180^0 та з повороту ромба в його площині навколо центра O.

Цим перетворенням відповідають наступні підстановки його вершин:

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а правила множення симетричних перетворень (2) ромба (або відповідних підстановок) можна подати, подібно як для трикутника, у вигляді таблиці.

Зауважимо, що група симетричних перетворень ромба – це група Клейна четвертого порядку. Ця група – комутативна, проте не циклічна.

Аналогічно досліджуються групи симетрій тетраедра та куба.

Так група симетрій тетраедра складається з 8-ми поворотів на кути 120^0 та 240^0 навколо прямих, які з'єднують вершини тетраедра з центром протилежної грані та трьох поворотів тетраедра на кут 180^0 навколо кожної з трьох прямих, що з'єднують середини двох яких-небудь протилежних ребер тетраедра. В даній роботі виписані всі підстановки , що відповідають цим поворотам, встановлені правила їх множення та виписані всі їх підгрупи.

Нарешті група симетрій куба налічує 24 повороти навколо 13 осей симетрії: чотирьох діагоналей, трьох прямих, які з'єднують попарно середини граней куба, шістьох прямих, що з'єднують середини протилежних ребер куба і є ізоморфною до групи S_4.

Література

Л.А.Калужнин, В.И.Сущанский Преобразования и подстановки / Калужнин Л..А, Сущанский В.И. – М.: Наука, 1985. – 159 с.