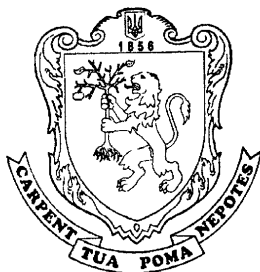


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет
механіки та енергетики

Кафедра
інформаційних систем та
технологій



ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ

***КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ
ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ ДОСЛІДЖУВАНИХ ВЕЛИЧИН***

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для виконання практичної роботи студентами спеціальності
126 – інформаційні системи та технологій,
ОС «Бакалавр»

Львів 2018

Рекомендовано до друку
методичною радою
Львівського національного
аграрного університету

Протокол №__
від __. __.2018 р.

Укладачі: д.т.н., в.о. проф. А.М. Тригуба,
к.т.н., доц. П.М. Луб

Відповідальний за випуск: д.т.н., в.о. проф. А.М. Тригуба

Рецензент: д.ф.-м.н., професор Ю.І. Ковальчик

© Львівський національний аграрний університет, 2018 р.

Практична робота №1

Тема: КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ
ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ ДОСЛІДЖУВАНИХ ВЕЛИЧИН

Мета: ОПАНУВАТИ МЕТОДИКУ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Тривалість заняття – 4 години (5 балів).

ЗАВДАННЯ

1. Для заданого варіанту відобразити точки у системі координат і висунути гіпотезу щодо форми зв'язку та рівняння регресії.
2. За формою зв'язку визначити його тісноту – коефіцієнт кореляції чи кореляційне відношення.
3. Розрахувати стандартну похибку, критерій значимості та довірчі інтервали коефіцієнта кореляції чи кореляційного відношення.
4. Визначити коефіцієнти регресії і записати рівняння кореляційної залежності.
5. Розрахувати стандартну похибку та довірчі інтервали коефіцієнта регресії.
6. Теоретичну лінію регресії Y по X , зазначити довірчу зону.

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

У дослідженнях часто зустрічаються такі співвідношення між змінними, коли кожному значенню величини (X) відповідає не одне, а декілька значень (Y). Такі зв'язки називаються кореляційними [5].

Під час вивчення кореляційних зв'язків виникають два головні завдання – стосовно тісноти зв'язку і його форми. Для вимірювання тісноти та форми зв'язку використовують спеціальні статистичні методи кореляційного та регресійного аналізів.

За формою кореляція може бути лінійною та криволінійною, за напрямом – прямою і оберненою. Кореляцію

та регресію називають простою, якщо досліджуються зв'язок між двома величинами, і множинною якщо вивчається залежність між трьома і більше величинами. Для поцінування тісноти (сили) зв'язку використовують коефіцієнт кореляції (r) і кореляційне відношення (n).

Вважається, що при $r < 0,3$ кореляційна залежність між величинами слабка, якщо $r = 0,3-0,7$ – середня, а за умови $r > 0,7$ – сильна.

Про наявність кореляції свідчить графік, на якому в прямокутній системі координат, де на осі абсцис відкладається величина X , а на осі ординат – величина Y , зображені дослідні точки (графік називають кореляційним полем) [6]. Якщо точки на графіку розміщені так, як на рис.1,а, то маємо сильно виражену пряму (позитивну, додатною) кореляцію, близьку до функціональної залежності. На рис. 1,б, зображений приклад явно вираженої прямої кореляції, на рис. 1,в, бачимо слабку обернену (негативну, відємну) кореляцію, а на рис. 1, г, зображено некорельовані величини.

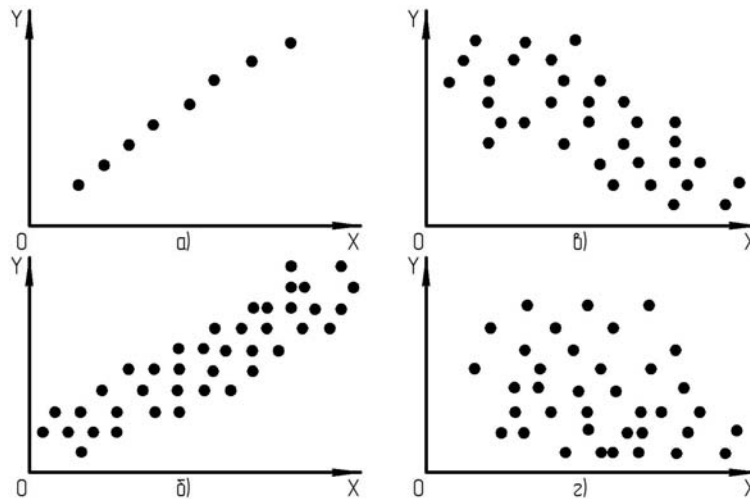


Рис. 1. Приклади дослідних залежностей з різною кореляцією: а – сильно виражена пряма кореляція; б – явно виражена пряма кореляції; в – слабо виражена обернена кореляція; г – кореляція відсутня.

Зв'язок між функцією та аргументом виражається рівнянням регресії або кореляційним рівнянням. При простій регресії рівняння можна коротко записати у неявному вигляді: $Y = f(X)$ і при множинній $Y = f(X, Z, V \dots)$. Для лінійної кореляції графіком буде пряма лінія, для криволінійної - крива (парабола, гіпербола тощо). Найчастіше вибір типу рівняння регресії встановлюється за допомогою графіка, на якому кожна задана пара зображена точкою на площині (системі координат). Якщо розміщення цих точок таке, що неможливо уявити кривої, біля якої вони тісно згруповані, то обмежуються лінійною кореляцією.

Під лінійною (прямолінійною) кореляційною залежністю між двома величинами X та Y розуміють таку залежність, яка має лінійний характер і виражається рівнянням прямої лінії [5].

Коли при однакових приростах аргументна інтенсивність зміни функції неоднакова, регресію називають криволінійною (рис. 2).

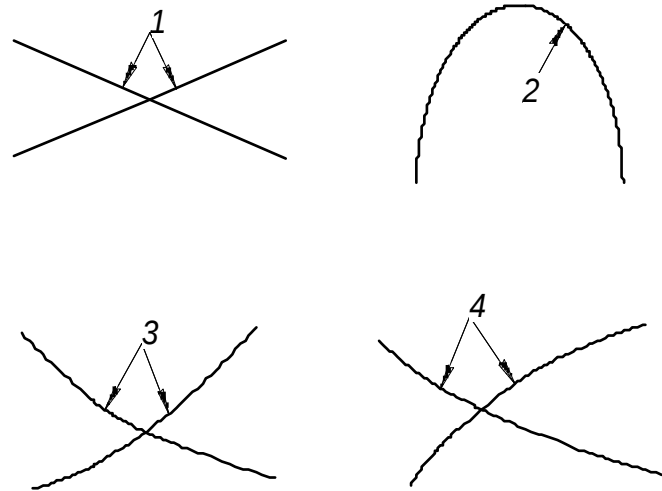


Рис. 2. Лінії, які ілюструють різні типи залежностей: 1 – прямолінійна залежність типу $Y = a + bx$; 2 – крива типу параболи $Y = a + b_1x + b_2x^2$; 3 – крива типу $\lg Y = a - bx$; 4 – крива типу $Y = a + b \lg x$.

Для побудови теоретичної лінії регресії потрібно визначити коефіцієнти (a , b або a , b_1 , b_2) рівняння цієї лінії, які називаються коефіцієнтами регресії. Ці коефіцієнти, як і всі інші показники, розраховують методом найменших квадратів.

МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ

1. Висунення гіпотези щодо форми кореляційної залежності та рівняння регресії.

Згідно із індивідуальним завданням (множина пар чисел) нанести точки у системі координат вибравши відповідний масштаб. З вигляду кореляційного поля (розподілу точок у системі координат) висунути гіпотезу щодо форми кореляційного зв'язку. На основі цього вибрати тип та рівняння регресії (рис. 2), які відображають дану залежність.

2. Визначення тісноти кореляційного зв'язку (коефіцієнт кореляції, кореляційне відношення).

2.1. Для розрахунків величин, що входять до формул, скласти розрахункову таблицю (табл. 1), в якій колонки 1-3 заповнюються згідно виданого індивідуального завдання. Для лінійної кореляції дана таблиця складатиметься із 4,5,6,7,10-ї колонок, для криволінійної - 6, 7, 8, 9-ї колонок.

Таблиця 1.

Розрахункова таблиця

N	X	Y	$X - X_c$	$(X - X_c)^2$	$Y - Y_c$	$(Y - Y_c)^2$	$Y_c x$	$(Y - Y_c)x$	$(X - X_c) \times (Y - Y_c)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									
2									
...	...	...	...		...		...		
n	..	...				.			
Σ									

2.2. Розрахувати середні значення X_c та Y_c за формулами:

$$X_c = \frac{\Sigma X}{n}, \quad Y_c = \frac{\Sigma Y}{n}, \quad (1)$$

де n - число пар даних вибірки.

У разі криволінійної кореляції розрахувати середнє значення Y_c та X_c за формулою (1) та вибрати часткові середні значення Y_{cx} і Y_{cy} згрупувавши дані вибірки по 4-5 значень.

2.3. Визначити відхилення досліджуваних величин та їх квадрати і занести у відповідні колонки таблиці.

2.4. Визначити **коефіцієнт кореляції** за формулою:

$$r = \frac{\Sigma(X - X_c) \times (Y - Y_c)}{\sqrt{\Sigma(X - X_c)^2 \times \Sigma(Y - Y_c)^2}}, \quad (2)$$

де $\Sigma(X - X_c)^2$ - сума квадратів відхилень значень X від середньоарифметичного X_c ; $\Sigma(Y - Y_c)^2$ - сума квадратів відхилень індивідуальних Y від середньоарифметичного Y_c .

У разі наявності криволінійної кореляції визначити **кореляційне відношення** за формулою:

$$\eta = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_c)^2 - \Sigma(Y - Y_{cx})^2}{\Sigma(Y - Y_c)^2}}, \quad (3)$$

де $\Sigma(Y - Y_{cx})^2$ - сума квадратів відхилень значень Y від часткових середніх Y_{cx} , що відповідають певним фіксованим значенням незалежної змінної X .

3. Для визначення надійності коефіцієнта кореляції (кореляційного відношення) визначити стандартну похибку, критерій значимості та довірчі інтервали.

3.1. Визначити стандартну похибку за формулою:

$$^{**}S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{\nu}}, \quad (4)$$

де ν - число ступенів вільності. Це число рівне $\nu = n - 2$.

3.2. Визначити критерій значимості за формулою:

$$t_r = \frac{r}{S_r}. \quad (5)$$

Якщо $t_r > t_{теор}$ то кореляційний зв'язок значний, а коли $t_r < t_{теор}$ - незначний. Теоретичне значення критерію t знаходять за таблицею Стюдента (табл. Д. 4). Рівень значимості приймають 5%-ий або 1 %-ий.

3.3. Довірчі інтервали визначити наступним чином:

$$^*r \pm t_{0,5} \times S_r. \quad (6)$$

4. Визначення коефіцієнта регресії та знаходження рівняння кореляційної залежності.

4.1. Визначити коефіцієнт регресії за формулою:

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(X - X_c) \times (Y - Y_c)}{\Sigma(X - X_c)^2} \text{ і} \\ b_{xy} = \frac{\Sigma(X - X_c) \times (Y - Y_c)}{\Sigma(Y - Y_c)^2}. \quad (7)$$

Правильність розрахунків перевірити за критерієм:

$$b_{yx} b_{xy} = r^2. \quad (8)$$

4.2. Рівняння лінійної регресії записати формулою:

$$Y = Y_c + b_{yx}(X - X_c). \quad (9)$$

Криволінійна кореляція часто відображається квадратичною параболою:

$$Y = a + b_1X + b_2X^2.$$

Квадратичну параболу можна розрахувати за формулою:

$$Y = Y_c + \frac{\Sigma(X - X_c)Y}{\Sigma(X - X_c)^2} (X - X_c) + \left[\frac{\Sigma(X - X_c)Y - nCY_c}{\Sigma(X - X_c)^4 - nC^2} \right] \times [(X - X_c)^2 - C], \quad (10)$$

$$\text{де } C = \frac{\Sigma(X - X_c)^2}{n}.$$

Якщо для емпіричної кривої важко підібрати відносно просте математичне рівняння, а також коли нема вагомих причин уточнювати результати досліджень, вирівнювання даних можна виконати способом простої ковзної середньої [5].

5. Визначення стандартної похибки та довірчих інтервалів коефіцієнта регресії

5.1. Визначити похибку коефіцієнтів регресії за формулами:

$$Sb_{yx} = S_r \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_c)^2}{\Sigma(X - X_c)^2}}; \quad (11-12)$$

$$Sb_{xy} = S_r \sqrt{\frac{\Sigma(X - X_c)^2}{\Sigma(Y - Y_c)^2}};$$

$$Sb_{xy} = S_r \sqrt{\Sigma(Y - Y_c)^2}, \quad (13)$$

де Sb_{yx}, Sb_{xy} – похибка коефіцієнта регресії відповідно до величини Y відносно X і величини X відносно Y ; S_r – загальна похибка коефіцієнта регресії.

5.2. Визначити межі довірчого інтервалу коефіцієнта регресії:

$$b_{yx} \pm t_{0.5} \cdot S_b. \quad (14)$$

6. Розрахунок усереднених теоретичних значень Y для екстремальних величин X і побудова теоретичної лінії регресії Y по X

6.1. Побудувати лінію регресії, вказати її рівняння, коефіцієнти регресії (рис. 3).

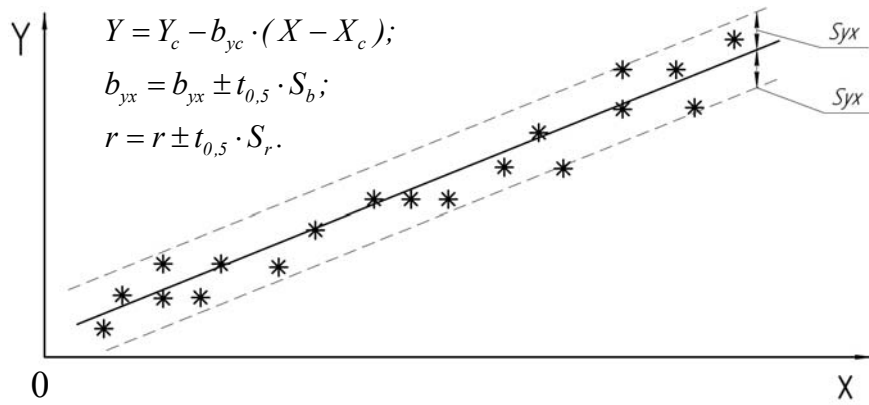


Рис. 3. Кореляційне поле (точковий графік), теоретична лінія регресії прямолінійної кореляції та довірча зона регресії.

6.2. Зазначити на графіку довірчу зону для лінії регресії.

Для цього вгору і вниз від теоретичної лінії регресії відкласти: величину однієї (68 %-а зона) або двох (95 %-а зона) похибок відхилення від регресії, тобто $\pm S_{yx}$ або $\pm 2S_{yx}$, і сполучити знайдені точки пунктирними лініями. Площа, що знаходиться між цими лініями, називається довірчою зоною лінії регресії.

Для криволінійної кореляції графік будується за допомогою способу простої ковзної середньої (див. п. 4). Суть його полягає в тому, що для кожного значення незалежної величини X береться середня арифметична кількох (суміжних) значень залежної величини Y (колонка 8, табл. 1);

$$Y_{ci} = \frac{(Y_{i-2} + Y_{i-1} + Y_i + Y_{i+1} + Y_{i+2})}{5}.$$

Правильність вирівнювання поцінують на підставі коефіцієнта кореляції r' між емпіричними і вирівняними значеннями

$$r' = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_c)^2 - \Sigma(Y_c x - Y)^2}{\Sigma(Y - Y_c)^2}}. \quad (15)$$

Якщо $r' \geq 0.95$, то вирівнювання вважається задовільним, а при $r' \geq 0.951$ спів падання між дослідними і вирівняними даними вважається недостатнім.

Таблиця. 2.

Коефіцієнт і двосторонніх довірчих границь $0.8 < \alpha < 0.95$

t	α	t	α	t	α	t	α
0,84	0,7995	1,04	0,8508	1,24	0,8925	1,44	0,9251
0,85	0,8023	1,05	0,8531	1,25	0,8944	1,45	0,9265
0,86	0,8051	1,06	0,8554	1,26	0,8962	1,46	0,9279
0,87	0,8078	1,07	0,8577	1,27	0,8990	1,47	0,9292
0,88	0,8106	1,08	0,8599	1,28	0,8997	1,48	0,9306
0,89	0,8133	1,09	0,8621	1,29	0,9015	1,49	0,9319
0,90	0,8159	1,10	0,8643	1,30	0,9032	1,50	0,9332
0,91	0,8186	1,11	0,8655	1,31	0,9049	1,51	0,9345
0,92	0,8212	1,12	0,8686	1,32	0,9066	1,52	0,9357
0,93	0,8238	1,13	0,8708	1,33	0,9082	1,53	0,9370
0,94	0,8264	1,14	0,8729	1,34	0,9099	1,54	0,9382
0,95	0,8289	1,15	0,8749	1,35	0,9115	1,55	0,9394
0,96	0,8315	1,16	0,8770	1,36	0,9131	1,56	0,9406
0,97	0,8340	1,17	0,8790	1,37	0,9147	1,57	0,9418
0,98	0,8365	1,18	0,8810	1,38	0,9162	1,58	0,9429
0,99	0,8389	1,19	0,8830	1,39	0,9177	1,59	0,9441
1,00	0,8413	1,20	0,8849	1,40	0,9192	1,60	0,9452
1,01	0,8437	1,21	0,8869	1,41	0,9207	1,61	0,9463
1,02	0,8461	1,22	0,8888	1,42	0,9222	1,62	0,9474
1,03	0,8485	1,23	0,8907	1,43	0,9236	1,63	0,9495

Приклад виконання практичної роботи № 4

Лінійна кореляція

Завдання для самостійної роботи

Провести кореляційно-регресійний аналіз взаємозв'язку відносної вологості (X) та липучості (Y) ґрунту.

Ряди значень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	19,9	20,9	26,1	29,4	30,5	40,3	44,8	47,3	55,6	58,3	64,5	76,6
Y	0,0	0,6	1,1	1,2	1,7	1,7	2,6	3,4	4,2	5,8	6,3	7,3

1. Висунення гіпотези щодо форми кореляційної залежності та рівняння регресії

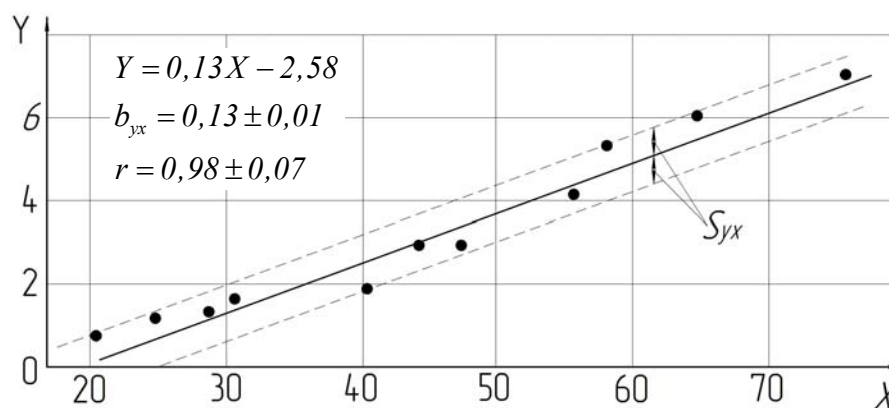


Рис. 1. Точковий графік та теоретична лінія регресії.

За зовнішнім виглядом точкового графіка висуваємо гіпотезу про те, що дана залежність має пряму лінійну кореляцію.

2. Визначення коефіцієнта кореляції

2.1. Складаємо розрахункову таблицю

Таблиця 1.

Результати розрахунків

N	X	Y	$X - X_c$	$(X - X_c)^2$	$Y - Y_c$	$(Y - Y_c)^2$	$(X - X_c) \times (Y - Y_c)$
1	19,9	0,0	-22,99	528,54	-2,99	8,94	68,74
2	20,9	0,6	-21,99	483,56	-2,39	5,71	52,56
3	26,1	1,1	-16,79	281,90	-1,89	8,57	31,73
4	29,4	1,2	-13,49	181,98	-1,79	3,20	24,15
5	30,5	1,7	-12,39	153,51	-1,29	1,66	15,98
6	40,3	1,7	-2,59	6,71	-1,29	1,66	3,34
7	44,3	2,6	1,91	3,65	-0,39	0,15	-0,74
8	47,8	3,4	4,91	24,11	0,41	0,17	2,01
9	55,6	4,2	12,71	161,54	1,21	1,46	15,38
10	58,3	5,8	15,41	237,47	2,81	7,90	43,30
11	64,5	6,3	21,61	466,99	3,31	10,96	71,53
12	76,6	7,3	33,71	1136,36	4,31	18,58	145,29
Σ	514,7	35,9	—	3666,33	—	63,97	473,2

2.2. Розраховуємо середні значення X_c та Y_c за формулами (1)

$$X_c = \frac{514,7}{12} = 42,89;$$

$$Y_c = \frac{35,9}{12} = 2,99.$$

2.3. Визначаємо відхилення досліджуваних величин та квадрати відхилень і дані заносимо у відповідні колонки таблиці.

2.4. Визначаємо коефіцієнт кореляції за формулою (2)

$$r = \frac{473,27}{\sqrt{3666,33 \times 63,97}} = 0,977.$$

Числове значення коефіцієнта кореляції свідчить про сильний зв'язок.

3. Визначення стандартної похибки, критерій значимості та довірчих інтервалів

3.1. Визначаємо стандартну похибку за формулою (4)

$$S_r = \sqrt{\frac{1 - 0,977^2}{12 - 2}} = 0,067.$$

3.2. Визначимо критерій значимості за формулою (5)

$$t_r = \frac{0,977}{0,067} = 14,58.$$

Як бачимо, $t_z > t_{теор}$ або $14,58 > 2,23$, а отже кореляційний зв'язок значний.

3.3. Довірчі інтервали мають вигляд (вираз (6))

$$0,977 \pm 2,23 \times 0,067 = 0,977 \pm 0,15 \quad (0,827 \dots 1,127).$$

4. Визначення коефіцієнта регресії та знаходження рівняння кореляційної залежності

4.1. Визначаємо коефіцієнт регресії за формулою (7)

$$b_{yx} = \frac{427,27}{3666,33} = 0,13;$$

$$b_{xy} = \frac{473,27}{63,97} = 6,84.$$

Правильність розрахунків перевіряємо за критерієм (8)

$$0,13 \cdot 6,84 = 0,955.$$

4.2. Рівняння лінійної регресії записується формулою (9) і має вигляд

$$Y = 2,99 + 0,13(X - 42,89) = 0,13x - 2,58.$$

5. Визначення стандартної похибки та довірчих інтервалів коефіцієнта регресії

5.1. Визначаємо похибку коефіцієнтів регресії за формулами (11-13)

$$Sb_{yx} = 0,067 \sqrt{\frac{63,97}{33666,33}} = 0,009;$$

$$Sb_{xy} = 0,067 \sqrt{\frac{3666,33}{63,97}} = 0,507;$$

$$S_{xy} = 0,067 \sqrt{63,97} = 0,54.$$

5.2. Довірчі інтервали коефіцієнта регресії мають вигляд (вираз (14))

$$0,13 \pm 2,23 \cdot 0,009 - 0,13 \pm 0,02 \quad (0,11...0,15).$$

Криволінійна кореляція

Завдання для самостійної роботи

Провести кореляційно-регресійний аналіз залежності питомих втрат (Y) коштів від обсягів виконуваних робіт (X) :

пара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	3	4	5	6	8	8	17	18	18	25	27	45
Y	25	23	15	14	12	11	5	7	7	5	3	2

1. Висунення гіпотези щодо форми кореляційної залежності та рівняння регресії

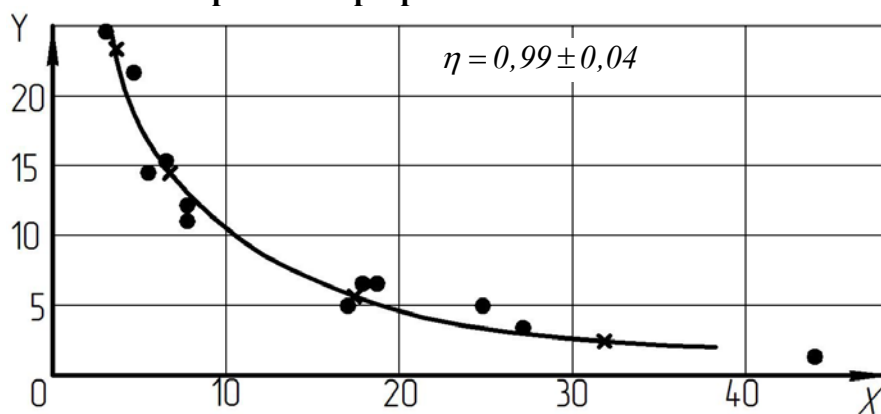


Рис. 2. Точковий графік та теоретична (згладжуюча) крива регресії

З вигляду точкового графіка висуваємо гіпотезу про наявність криволінійної кореляції. Лінією регресії (згладжуюча лінія) буде деяка крива типу $Y = a + b \times \lg X$.

2. Визначення кореляційного відношення

2.1. Складаємо розрахункову таблицю

Таблиця 2.

Результати розрахунків

N	X	X_{cY}	Y	Y_{cX}	$Y - Y_{cX}$	$(Y - Y_{cX})^2$	$Y - Y_c$	$(Y - Y_c)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	3.5	25	24.00	1.00	1.00	14.25	203.06
2	4		23		-1.00	1.00	12.25	150.06
3	5	5.5	14	14.50	0.50	0.25	4.25	18.06
4	6		15		-0.50	0.25	3.25	10.56
5	8	8.0	12	11.50	0.50	0.25	1.25	1.56
6	8		11		-0.50	0.25	0.25	0.06

Продовження табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	17	17.67	5	6.33	-1.33	1.77	-5.75	33.06
8	18		7		0.67	0.45	-3.75	14.06
9	18		7		0.67	0.45	-3.75	14.06
10	25	32.33	5	3.33	1.67	2.79	-5.75	33.06
11	27		3		-0.33	0.11	-7.75	60.06
12	45		2		-1.33	1.77	-8.75	76.56
Σ	184	15.33	129	10.75	0.02	10.34	0.00	614.22

2.2. Розраховуємо середні значення X_c та Y_c за формулами (1)

$$X_c = \frac{184}{12} = 15,33;$$

$$Y_c = \frac{129}{12} = 10,75.$$

2.3. Визначаємо відхилення досліджуваних величин та їх квадрати відхилень і заносимо у відповідні колонки таблиці 2.

2.4. Визначаємо кореляційне відношення за формулою (3)

$$\eta = \sqrt{\frac{614,22 - 10,34}{614,22}} = 0,99.$$

3. Визначення стандартної похибки, критерію значимості та довірчих інтервалів

3.1. Визначаємо стандартну похибку за формулою (4)

$$S_h = \sqrt{\frac{1-0,99}{12-2}} = 0,04.$$

3.2. Визначаємо критерій значимості за формулою (5)

$$t_h = \frac{0,99}{0,04} = 24,75.$$

Як бачимо, $t_h > t_{теор}$ бо $24,75 > 2,23$. Отже, кореляційний зв'язок значний.

3.3. Довірчі інтервали мають вигляд (за виразом (6))

$$0,99 + 2,23 \cdot 0,04 - 0,99 \pm 0,09 \quad (0,90...1,00).$$

4. Розрахунок усереднених теоретичних значень Y для екстремальних величин X і побудова теоретичної лінії регресії Y за X

Точки з координатами, що відповідають груповим середнім значенням X_{cy} і Y_{cx} , відображаємо у графіку (рис. 2 додатків) і з'єднуємо їх плавною лінією. Це і буде лінія регресії Y по X . Вона показує, що питомі витрати коштів на виконання відповідних робіт особливо різко зростають, коли обсяг робіт становитиме менше 15 одиниць (га, т·км, люд·год тощо).

Як показник правильності вирівнювання використаємо коефіцієнт кореляції між емпіричним і вирівняним значенням величини (формула (15)). В даному випадку $r = \eta$.

Як бачимо, $r > 0,95$, бо $0,99 > 0,95$. Отже вирівнювання вважається задовільним.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке коефіцієнт кореляції?
2. Що таке кореляційне відношення?
3. Який коефіцієнт кореляції свідчить про відсутність зв'язку?
4. Який коефіцієнт кореляції свідчить про наявність зв'язку?
5. Чим виражається зв'язок між функцією та аргументом?
6. Які розрізняють форми кореляційних зв'язків?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Вентцель Е. С. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пос. для вузов] / Гмурман В. Е. – [6-е изд.] – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.
3. Хастингс Н. Справочник по статистическим распределениям / Н. Хастингс, Дж Пикок. – М. : Статистика, 1980. – 94 с.
4. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим : ГОСТ 11.006-75. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 32 с.
5. Уланова Е.С., Забелин В.Н.. Методы корреляционного и регрессионного анализа в агрометеорологии. Л.: Гидрометеоиздат. – 1990. – 146с.

1. Варіанти індивідуальних завдань (лінійна кореляція)

Варіант	Ряди зна- чень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	X	19.9																			
	Y	0	20.9	1.24	26.1	4.6	60.6	1.7	30.5	2.06	40.3	3.18	44.8	4	47.3	4.2	55.6	5.5	58.3	6.3	64.5
2	X	35.5																			
	Y	37.65	36.6	37.62	35.41	31.6	39.03	37.79	37.56	38.68	3.18	44.8	40.1	4	47.3	39.7	29.45	27.7	41	5.5	58.3
3	X	24.9																			
	Y	7	8.24	25.9	9.12	31.1	35.41	31.6	39.03	37.79	37.56	38.68	3.18	44.8	40.1	4	47.3	39.7	29.45	27.7	41
4	X	16.5																			
	Y	28.2	17.5	27.6	22.7	23.6	57.2	26.5	27.1	26.5	27.1	26.5	27.1	26.5	27.1	26.5	27.1	26.5	27.1	26.5	27.1
5	X	11.4																			
	Y	11.5	12.4	12.4	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6	13.62	17.6
6	X	25																			
	Y	58.2	48.5	57.6	72	55	95.5	119	13.79	22	49.8	56	21.9	68.1	20.9	73.2	14.3	81.6	24.9	38	2.5
7	X	12.4	14.4	20.6	52	27	41.3	43.3	46.8	53	59.8	67	80.1	55	42.1	31.9	74.1	79.7	79.1	83.9	51.3

22	X	43.9	0.45	24.9	47.2	289.9	X	19	X	53.3	29.7	X	17	Y	66.3	X	16	Y	604.4	Y
		44.9	0.9	25.9	46.6	290.9	Y		Y	53	30.7	Y		1	65.3				605.4	
		50.1	1.45	31.1	45.96	296.1				52.3	35.9			1.7	60.1				610.6	
		80.5	1.9	61.5	42.6	330.6				49.8	66.3			4.2	25.6				645.1	
		54.5	2.45	35.5	45.5	300.5				49.1	40.3			4.9	55.7				615	
		67.8	2.9	48.8	45.14	310.3				48.4	53.6			5.6	45.9				624.8	
		68.8	3.45	49.8	44.02	314.8				47.7	54.6			6.3	41.4				629.3	
		71.3	3.9	52.3	43.2	317.3				47	57.1			7	38.9				631.8	
		76.5	4.45	57.5	43	325.6				46.3	62.3			7.7	30.6				640.1	
		82.3	4.9	63.3	41.7	328.3				45.6	68.1			8.4	27.9				642.8	
		88.5	5.45	69.5	40.9	334.5				44.9	74.3			9.1	21.7				649	
		100.6	5.9	81.6	39.9	346.6				44.2	86.4			9.8	9.6				661.1	
		74.5	6.45	55.5	44.7	305.3				43.5	60.3			10.5	50.9				619.8	
		60.6	6.9	41.6	45.64	303.4				45.6	46.4			8.4	52.8				617.9	
		49.4	7.45	30.4	46.8	295.4				47	35.2			7	60.8				609.9	
		90.6	7.9	71.6	41.91	336.6				46.3	76.4			7.7	19.6				651.1	
		95.2	8.45	76.2	40	341.2				45.6	81			8.4	15				655.7	
		93.6	8.9	74.6	40.8	339.6				44.9	79.4			9.1	16.6				654.1	
		97.4	9.45	78.4	40.4	348.8				44.2	83.2			9.8	7.4				663.3	
		63.8	9.9	44.8	44	312.2				44	49.6			10	44				626.7	

29	28	27	26	25	24	23	
	X	Y	X	Y	Y	X	Y
37	56.65	371	82.9	30.5	12.4	11.5	19.45
		1254.45	352		66.3		0.45
38.24	55.6	372.4	80.9	31.74	14.4	12.74	15.4
		1255.5	353.24		65.3		1.5
39.12	54.41	373.1	74.7	32.62	20.6	13.62	20.5
		1256.69	354.12		60.1		21.69
40.53	50.6	374.3	43.3	34.03	52	15.03	21.6
		1260.5	355.53		25.6		2.69
39.29	52.95	373.2	68.3	32.79	27	13.79	56.1
		1258.15	354.29		55.7		6.5
39.06	52.14	373.0	54	32.56	41.3	13.56	26
		1258.96	354.06		23.96		4.15
40.18	50.47	374.1	52	33.68	43.3	14.68	35.8
		1260.63	355.18		41.4		4.96
41.6	49.2	375.6	48.5	35.1	38.9	26.9	6.63
		1261.9	356.6		26.9		40.3
41.2	48.45	375.2	42.3	34.7	53	15.7	42.8
		1262.65	356.2		30.6		7.9
42.5	46.7	376.5	35.5	36	27.65	51.1	8.65
		1264.4	357.5		29.4		49.45
43.3	45.35	377.3	28.3	36.8	21.7	30.75	53.8
		1265.75	358.3		60		10.4
44.3	43.9	378.3	15.2	37.8	17.8	13.2	48.45
		1267.2	359.3		9.6		11.75
39.5	48.15	373.5	40.3	33	18.8	32.2	60
		1262.95	354.5		14		72.1
38.56	48.64	372.5	53.2	32.06	50.9	27.95	13.2
		1262.46	353.56		52.8		48
37.06	49.25	371.0	63.4	30.56	13.06	27.46	8.95
		1261.85	352.06		60.8		30.8
42.29	43.91	376.2	21.2	35.79	74.1	16.79	8.46
		1267.19	357.29		19.6		28.9
44.2	41.45	378.2	15.6	37.7	15	34.65	20.9
		1269.65	359.2		62.1		7.85
44.47	41.8	378.4	16.2	37.97	79.1	18.97	13.19
		1269.3	359.47		65.1		46
42.47	40.85	376.4	11.4	35.97	83.9	16.97	15.65
		1270.25	357.47		74.3		45.45
40.2	44	374.2	44	33.7	51.3	14.7	16.25
		1267.1	355.2		37.7		44.45
					44		13.1
					32.1		44

30	Y	102.9	1562.45	1214.45
	X	100.9	1563.5	1215.5
	Y	94.7	1564.69	1216.69
	X	63.3	1568.5	1220.5
	Y	88.3	1566.15	1218.15
	X	74	1566.96	1218.96
	Y	72	1568.63	1220.63
	X	68.5	1569.9	1221.9
	Y	62.3	1570.65	1222.65
	X	55.5	1572.4	1224.4
	Y	48.3	1573.75	1225.75
	X	35.2	1575.2	1227.2
	Y	60.3	1570.95	1222.95
	X	73.2	1570.46	1222.46
	Y	83.4	1569.85	1221.85
	X	41.2	1575.19	1227.19
	Y	35.6	1577.65	1229.65
	X	36.2	1577.3	1229.3
	Y	31.4	1578.25	1230.25
	X	64	1575.1	1227.1

2. Варіанти індивідуальних завдань (криволінійна кореляція)

Варіант	Ряди значень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	X	3	4	5	6	8.87	8	17	18	18	25	27	45	12	11	15	36	34	4	22	42
	Y	25	23	15	16	12	11	5	7	7	5	3	2	8	13	8	3	2	18	4	2
2	X	6.5	7.5	38.5	9.5	12.37	11.5	20.5	21.5	21.5	28.5	30.5	48.5	25	14.5	18.5	39.5	37.5	7.5	25.5	45.5
	Y	10	25	200	55	70	85	100	115	130	145	160	225	190	155	220	235	250	150	220	295
3	X	5	6	7	8	10.87	10	19	20	20	27	29	47	14	13	17	38	36	6	24	44
	Y	0	2	10	9	13	14	20	18	18	20	22	23	17	12	17	22	23	7	21	23
4	X	146	134.5	87	93.5	70	64.5	29	41.5	42	30.5	10	2	5	39	5	0	3	115	1	2

11	10	9	8	7	6	5	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y
348	104.5	251	437	48.5	57.5	50	6.5
349	119.5	249	438	44.5	72.5	46	7.5
350	134.5	241	439	28.5	87.5	30	8.5
351	149.5	242	440	30.5	102.5	32	9.5
353.7	164.5	238	442.87	22.5	117.5	24	12.37
353	179.5	237	442	20.5	132.5	22	11.5
362	304.5	231	451	8.5	257.5	10	20.5
363	209.5	233	452	12.5	162.5	14	21.5
363	224.5	233	452	12.5	177.5	14	21.5
370	239.5	231	459	8.5	192.5	10	28.5
372	254.5	229	461	1.5	207.5	3	30.5
390	269.5	228	479	0.5	222.5	2	48.5
357	284.5	234	446	6.5	237.5	8	15.5
356	299.5	239	445	11.5	252.5	13	14.5
360	314.5	234	449	6.5	267.5	8	18.5
381	329.5	229	470	1.5	282.5	3	39.5
379	344.5	228	468	0.5	297.5	2	37.5
349	194.5	244	438	16.5	147.5	10	7.5
367	414.5	230	456	2.5	367.5	4	25.5
387	389.5	228	476	0.5	342.5	2	45.5

18	17		16		15		14		13		12		
	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>
45	147.5	6.5	128.5	471	238	7.5	217	373	99	6.5	345	350	240
60	136	7.5	143.5	472	236	8.5	219	374	91.5	7.5	347	351	238
75	88.5	8.5	158.5	473	228	9.5	227	375	60	8.5	355	352	230
90	95	9.5	173.5	474	229	10.5	226	376	64.5	9.5	354	353	231
105	71.5	12.37	188.5	476.87	225	13.37	230	378.7	49	12.37	358	355.7	227
120	66	11.5	203.5	476	224	12.5	231	378	45.5	11.5	359	355	226
435	30.5	20.5	328.5	485	218	21.5	237	387	22	20.5	365	364	220
150	43	21.5	233.5	486	220	22.5	235	388	30.5	21.5	363	365	222
165	43.5	21.5	248.5	486	220	22.5	235	388	31	21.5	363	365	222
180	32	28.5	263.5	493	218	29.5	237	395	23.5	28.5	365	372	220
195	11.5	30.5	278.5	495	216	31.5	239	397	10	30.5	367	374	218
210	0.5	48.5	293.5	513	215	49.5	240	415	0.5	48.5	368	392	217
225	6.5	25	308.5	480	221	16.5	234	382	6.5	15.5	362	359	223
240	40.5	14.5	323.5	479	226	15.5	229	381	11.5	14.5	357	358	228
255	6.5	18.5	338.5	483	221	19.5	234	385	6.5	18.5	362	362	223
270	1.5	39.5	353.5	504	216	40.5	239	406	1.5	39.5	367	383	218
285	0.5	37.5	368.5	502	215	38.5	240	404	0.5	37.5	368	381	217
135	60.5	7.5	218.5	472	231	8.5	224	374	16.5	7.5	352	351	233
355	2.5	25.5	438.5	490	217	26.5	238	392	2.5	25.5	366	369	219
330	0.5	45.5	413.5	510	215	46.5	240	412	0.5	45.5	368	389	217

26	X	21	229	471	249	319	45	350	215	55	55	111	219.5	88.9	10	363	215
		22	227	472	251	320	60	348	217	95	70	103.5	221.5	103.9	25	361	217
		23	219	473	259	321	75	340	225	135	85	72	229.5	118.9	40	353	225
		24	220	474	258	322	90	341	224	175	100	76.5	228.5	133.9	55	354	224
		26.87	216	476.7	262	324.7	105	337	228	215	115	61	232.5	148.9	70	350	228
		26	215	476	263	324	120	336	229	255	130	57.5	233.5	163.9	85	349	229
		35	209	485	269	333	435	324	235	595	255	34	239.5	288.9	400	337	235
		36	211	486	267	334	150	332	233	335	160	42.5	237.5	193.9	115	345	233
		36	211	486	267	334	165	332	233	375	175	43	237.5	208.9	130	345	233
		43	209	493	269	341	180	330	235	415	190	35.5	239.5	223.9	145	343	235
		45	207	495	271	343	195	328	237	455	205	22	241.5	238.9	160	341	237
		63	206	513	272	361	210	327	238	495	220	12.5	242.5	253.9	175	340	238
		30	212	480	266	328	225	333	232	535	235	18.5	236.5	268.9	190	346	232
		29	217	479	261	327	240	338	227	575	250	23.5	231.5	283.9	205	351	227
		33	212	483	266	331	255	333	232	615	265	18.5	236.5	298.9	220	346	232
		54	207	504	271	352	270	328	237	655	280	13.5	241.5	313.9	235	341	237
		52	206	502	272	350	285	322	238	695	295	12.5	242.5	328.9	250	335	238
		22	222	472	256	320	135	343	230	570	145	28.5	226.5	178.9	100	356	222
		40	208	490	270	338	355	322	236	815	365	14.5	240.5	398.9	320	335	236
		60	206	510	272	358	330	327	238	815	340	12.5	242.5	373.9	295	340	238

30	Y	112	382	56.5	372	5	20	70.5	348	100
	X	167	383	71.5	370	7	21	85.5	349	155
29	Y	222	384	86.5	362	15	22	100.5	350	210
	X	277	385	101.5	363	14	23	115.5	351	265
28	Y	332	387.7	116.5	359	18	25.87	130.5	353.7	320
	X	387	387	131.5	358	19	25	145.5	353	375
27	Y	1042	396	256.5	346	25	34	270.5	362	1030
	X	497	397	161.5	354	23	35	175.5	363	485
	Y	552	397	176.5	354	23	35	190.5	363	540
	X	607	404	191.5	352	25	42	205.5	370	595
	Y	662	406	206.5	350	27	44	220.5	372	650
	X	717	424	221.5	349	28	62	235.5	390	705
	Y	772	391	236.5	355	22	29	250.5	357	760
	X	827	390	251.5	360	17	28	265.5	356	815
	Y	882	394	266.5	355	22	32	280.5	360	870
	X	937	415	281.5	350	27	53	295.5	381	925
	Y	992	413	296.5	344	28	51	310.5	379	980
	X	717	383	146.5	365	12	21	160.5	349	705
	Y	1182	401	366.5	344	26	39	380.5	367	1170
	X	1157	421	341.5	349	28	59	355.5	387	1145